

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 2.1 ΕΩΣ 2.3 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Πότε λέμε ότι μια ισότητα είναι ταυτότητα;

Β) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: «Για οποιουδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha^6 = \beta^6$ ισχύει $\alpha = \beta$ ». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$

ii) Για οποιουδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

iii) Για κάθε θετικό ακέραιο n και για οποιουδήποτε μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$

iv) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha\beta < 0 \Leftrightarrow |\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$

v) Για οποιουδήποτε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$

Μονάδες: 4+6+5+5x2=25

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τις παραστάσεις $K = (x+1)^3 + (x-1)^3 - x(x^2 + 6)$ και $\Lambda = x^4 + (x-x^2)(x+x^2)$.

Α) Να αποδείξετε ότι: $K = x^3$ και $\Lambda = x^2$

B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$N = \frac{2022^3 + 2020^3 - 2021(2021^2 + 6)}{2021^4 + (2021 - 2021^2)(2021 + 2021^2)}$$

Γ) Έστω $M = \frac{K + \Lambda}{K - \Lambda}$ και ονομάζουμε A το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ορίζεται η παράσταση M .

i) Να προσδιορίσετε το σύνολο A .

ii) Να αποδείξετε ότι: $M = \frac{x+1}{x-1}$ για κάθε $x \in A$.

Δ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{49}{64}, \frac{729}{125}, 1, \frac{343}{512}$ και $\frac{81}{25}$ αφού πρώτα αποδείξετε ότι:

i) $0 < x < 1 \Rightarrow x^3 < x^2 < 1$

ii) $x > 1 \Rightarrow x^3 > x^2 > 1$

Μονάδες: 6+5+3+3+2+3+3=25

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

- $\alpha < \beta < \gamma$
- $|\alpha + \beta + \gamma| = 12$
- $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{2} = \gamma$

A) Να βρείτε τους α, β, γ .

B) Για $\alpha = -6, \beta = -4, \gamma = -2$ και $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha < x < \gamma$:

i) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $(\alpha\gamma)^\beta$ και $(\beta\gamma)^\alpha$

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x, \beta) < 2$

iii) Να αποδείξετε ότι: $d(x^2, -5\beta) < 16$

iv) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \|x - \alpha| + \beta| - |\beta - |x + 1||$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη του x .

ν) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 4| + |4 - x^2| - |x^2 + 8x + 12|$$

Μονάδες: 7+3+3+4+4+4=25

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε το ανοικτό διάστημα $\left(\alpha - \frac{1}{2}, \beta + \frac{5}{2}\right)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να

ισχύει:

$$\bullet \quad |\alpha^2 - \beta^2| + 5\alpha^2 = -4\alpha - 1 - 2\alpha\beta - \beta^2$$

Έστω επίσης $x, y \in \left(\alpha - \frac{1}{2}, \beta + \frac{5}{2}\right)$ για τους οποίους ισχύουν:

$$\bullet \quad |x - 3| \leq x_0$$

$$\bullet \quad |y + 1| \leq x_0, \text{ όπου } x_0 \text{ το κέντρο του διαστήματος } \left(\alpha - \frac{1}{2}, \beta + \frac{5}{2}\right)$$

A) Να δείξετε ότι ισχύει: $\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$

B) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } -8 < -2x + 3y + 1 \leq -3$$

$$\text{ii) } \left|\frac{y}{x} + \frac{1}{4}\right| \leq \frac{1}{4}$$

Γ) Έστω $\gamma \in \left(\alpha - \frac{1}{2}, \beta + \frac{5}{2}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι, στον άξονα των πραγματικών αριθμών, το σημείο $A\left(\frac{\gamma+1}{\gamma+2}\right)$

βρίσκεται πλησιέστερα στο $M(x_0)$ από ό,τι το σημείο $B\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)$.

ii) Να βρείτε την τιμή του γ ώστε να ισχύει: $d\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}, x_0\right) = 3 \cdot d\left(\frac{\gamma+1}{\gamma+2}, x_0\right)$

Μονάδες: 6+4+6+5+4=25