ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 3.1 ΕΩΣ 4.2 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1) Ποια είναι η μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού;

Α2) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Να αναφέρετε τους τύπους του Vieta.

Β) Να αποδείξετε ότι αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, όπου $\alpha \neq 0$, έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<x_2$ τότε είναι ομόσημο του α όταν το x βρίσκεται εκτός των ριζών και ετερόσημο του α όταν το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών.

Γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: ≪Η ανίσωση $0x>\beta^2$ είναι αδύνατη για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$≫. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η εξίσωση $|x|=x$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αλλά δεν είναι ταυτότητα.

ii) Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με $\alpha>0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις για κάθε ν θετικό ακέραιο.

iii) Αν ένα τριώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων, τότε για τη διακρίνουσά του Δ ισχύει $\Delta \geq 0$.

iv) Για οποιουσδήποτε $\alpha,\gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha\gamma<0$, η εξίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

v) Η εξίσωση $x^2=x+6$ έχει δύο λύσεις, τους αριθμούς -2 και -3.

Μονάδες: 2+3+6+4+5×2=25

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε το τριώνυμο $P(x)=x^2+5x+\kappa^2$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ και τις ανισώσεις $x+\frac{x-1}{4} \geq \frac{1+2x}{2}$ (1) και $\frac{8x+2}{6}<\frac{7}{3}+x$ (2). Έστω επίσης η εξίσωση

$\left(x-\alpha\right)^{\beta}=-64\left(x-\alpha\right)^{\beta-\alpha}$ (3) όπου α η μικρότερη ακέραια λύση της ανίσωσης (1) και β η μεγαλύτερη ακέραια λύση της ανίσωσης (2).

Α) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τους ακέραιους αριθμούς α και β.

Για $\alpha=3$ και $\beta=5$:

Β) Να λύσετε την εξίσωση (3).

Γ) Έστω $x_1=3$ και $x_2=-1$ οι δύο ρίζες της εξίσωσης (3)

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός x_1 δεν μπορεί να είναι και ρίζα του τριωνύμου $P\left(x\right)$.

ii) Να βρείτε όλους τους $\kappa\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ο αριθμός x_2 είναι ρίζα του τριωνύμου $P\left(x\right)$.

iii) Για $\kappa=\pm2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\dfrac{Q\left(x\right)}{P\left(x\right)}$ όπου $Q\left(x\right)=x^3-x^2-2x$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Μονάδες: 7+5+4+4+5=25

ΘΕΜΑ 3ο

Α) Να λύσετε την εξίσωση $\left(x-1\right)^2-\left|x-1\right|-2=0$ και τη (διπλή) ανίσωση $1<\left|x-1\right|<3$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης.

Β) Θεωρούμε την εξίσωση $\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^2+2\alpha^2x+\alpha^2-\beta^2=0$ (1) όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ παράμετροι.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1,x_2 για οποιουσδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

ii) Να αποδείξετε ότι για τις ρίζες x_1,x_2 ισχύει: ${x_1}^2+{x_2}^2\neq2$.

Έστω $\beta=\pm1$:

iii) Να λύσετε την εξίσωση (1) και να αποδείξετε ότι οι ρίζες της είναι $x_1=-1$ και $x_2=\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

iv) Να βρείτε όλους τους $\alpha\in\mathbb{R}^*$ για τους οποίους ισχύει: $x_1x_2=0$

v) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x_1 και x_2 δεν μπορεί να είναι ούτε αντίθετοι ούτε αντίστροφοι.

Μονάδες: 8+3+4+3+3+4=25

ΘΕΜΑ 4ο

Α) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \gamma x + \gamma = 0$ (1) όπου $\gamma \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

i) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $\gamma \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $\alpha + \beta = \alpha\beta = \gamma$, όπου $\gamma \in (0,4)$.

iii) Θεωρώντας γνωστό ότι ο αριθμός $\sqrt{5}$ είναι άρρητος, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ζεύγος διαδοχικών ακέραιων αριθμών των οποίων το άθροισμα να ισούται με το γινόμενο.

Β) Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

i) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε όλους τους $\lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η ανίσωση
$\left[2 \cdot \left(\frac{1013}{2022}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1013}{2022} + 1\right]\left(x^2 + 4\lambda x + 3\lambda\right) \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες: 6+6+5+3+5=25