

## Δυνάμεις

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α.  $4^3$       β.  $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$       γ.  $(-5)^2$       δ.  $\left(\frac{1}{3}\right)^3$   
ε.  $-4^2$       στ.  $(-2)^3$       ζ.  $-(-1)^5$       η.  $2003^0$

### Λύση

α.  $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

β. Εδώ η βάση είναι αρνητική και ο εκθέτης άρτιος.

$$\text{Άρα } \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \left(\text{Ιδιότητα } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}\right)$$

γ. Ομοίως  $(-5)^2 = +5^2 = +25$

δ.  $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$

ε. Εδώ το μείον (-) δεν είναι μέσα σε παρένθεση, άρα δεν είναι το πρόσημο του αριθμού οπότε  $-4^2 = -16$ .

στ. Εδώ η βάση είναι αρνητική και ο εκθέτης περιττός. Άρα  $(-2)^3 = -8$ .

ζ.  $-(-1)^5 = -(-1) = +1$

η. Όποιον αριθμό και να τον υψώσουμε στην μηδενική δύναμη μας δίνει 1,  $a^0 = 1$ .

Άρα  $2003^0 = 1$ .

Να γράψετε τα παρακάτω γινόμενα με τη μορφή μιας δύναμης:

α.  $5^8 \cdot 5^{10} \cdot 5^3$       β.  $(-2)^2 \cdot (-2)^8 \cdot (-2)^5$

### Λύση

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $a^m \cdot a^v = a^{m+v}$  έχουμε:

α.  $5^8 \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = 5^{8+10+3} = 5^{21}$

$$\beta. (-2)^2 \cdot (-2)^8 \cdot (-2)^5 = (-2)^{2+8+5} = (-2)^{15}$$

**Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:**

$$\alpha. (-3)^2 + (-3)^3 - 3^2 + 3^3 \quad \beta. -1^2 + (-1)^5 - 1^2 + (-1)^4$$

**Λύση**

Εξετάζοντας το πρόσημο της δύναμης κάθε φορά έχουμε:

$$\alpha. (-3)^2 + (-3)^3 - 3^2 + 3^3 = \cancel{9} - \cancel{27} - \cancel{9} + \cancel{27} = 0$$

$$\beta. -1^2 + (-1)^5 - 1^2 + (-1)^4 = -1 + (-1) - 1 + (+1) = -3 + (+1) = -2$$

**Να βρείτε το πρόσημο σε κάθε μία περίπτωση:**

$$\alpha. (-8)^5 \quad \beta. (-1)^3 \quad \gamma. (-5)^4 \quad \delta. (-12)^7$$

**Λύση**

**α.** Αρνητική βάση, περιττός εκθέτης. Άρα αρνητικό πρόσημο.

**β.** Αρνητική βάση, περιττός εκθέτης. Άρα αρνητικό πρόσημο.

**γ.** Αρνητική βάση, άρτιος εκθέτης. Άρα θετικό πρόσημο.

**δ.** Αρνητική βάση, περιττός εκθέτης. Άρα αρνητικό πρόσημο.

**Να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά με ένα από τα σύμβολα  $<$ ,  $>$  ή  $=$ .**

$$\alpha. (-4)^8 \dots 0 \quad \beta. (-3)^7 \dots 0 \quad \gamma. (-1)^{16} \dots 1$$

**Λύση**

**α.** Έχουμε αρνητικό αριθμό υψωμένο σε άρτιο εκθέτη. Άρα το πρόσημο θα είναι θετικό. Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του μηδενός. Άρα  $(-4)^8 > 0$

**β.** Έχουμε αρνητικό αριθμό υψωμένο σε περιττό εκθέτη. Άρα το πρόσημο θα είναι αρνητικό. Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος του μηδενός. Άρα  $(-3)^7 < 0$ .

$$\gamma. (-1)^{16} = 1.$$

**Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:**

$$\alpha. 8^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5 \quad \beta. (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (+2)^4$$

**Λύση**

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $(a \cdot \beta)^v = a^v \cdot \beta^v$  έχουμε:

$$\alpha. 8^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5 = \left(8 \cdot \frac{1}{8}\right)^5 = \left(\frac{8}{8}\right)^5 = 1^5 = 1$$

$$\beta. (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (+2)^4 = \left[-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot (+2)\right]^4 = (-2)^4 = +16$$

Να υπολογίσετε τα πηλίκα:                      α.  $\frac{10^2}{5^2}$                       β.  $(-20)^3 : 5^3$

### Λύση

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $\frac{\alpha^v}{\beta^v} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v$  έχουμε:

$$\alpha. \frac{10^2}{5^2} = \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$\beta. (-20)^3 : 5^3 = \frac{-20^3}{5^3} = \left(\frac{-20}{5}\right)^3 = (-4)^3 = -64$$

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha. \frac{30^4}{15^4} - \frac{100^3}{(-50)^3} + \frac{18^3}{6^3} \qquad \qquad \qquad \beta. 14^3 : (-7)^3 + 36^2 : 12^2 - 28^3 : (-14)^3$$

### Λύση

Χρησιμοποιώντας της ιδιότητες των δυνάμεων και εξετάζοντας κάθε φορά το πρόσημο της δύναμης έχουμε:

$$\alpha. \frac{30^4}{15^4} - \frac{100^3}{(-50)^3} + \frac{18^3}{6^3} = \left(\frac{30}{15}\right)^4 - \left(\frac{100}{-50}\right)^3 + \left(\frac{18}{6}\right)^3 = 2^4 - (-2)^3 + 3^3 =$$

$$16 - (-8) + 27 = 16 + 8 + 27 = 51$$

$$\beta. 14^3 : (-7)^3 + 36^2 : 12^2 - 28^3 : (-14)^3 = \frac{14^3}{(-7)^3} + \frac{36^2}{12^2} - \frac{28^3}{(-14)^3} =$$

$$\left(\frac{14}{-7}\right)^3 + \left(\frac{36}{12}\right)^2 - \left(\frac{28}{-14}\right)^3 = (-2)^3 + 3^2 - (-2)^3 = \cancel{-8} + 9 \cancel{-8} = +9$$

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:      α.  $[(-1)^2]^3$       β.  $[(-2)^3]^3$

### Λύση

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $(a^v)^μ = a^{v \cdot μ}$  έχουμε:

$$\alpha. [(-1)^2]^3 = (-1)^6 = +1 \qquad \beta. [(-2)^3]^3 = (-2)^9 = -512$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παρακάτω παράστασης:

$$A = 3 \cdot [7 - (-2)^3] + [6 \cdot (-4)^2] : (-12)$$

### Λύση

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων και τους κανόνες της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ρητών αριθμών έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot [7 - (-2)^3] + [6 \cdot (-4)^2] : (-12) = 3 \cdot [7 - (-8)] + (6 \cdot 16) : (-12) = \\ &= 3 \cdot (7 + 8) + 96 : (-12) = 3 \cdot 15 + 96 : (-12) = 45 + (-8) = +37 \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

$$\alpha. \frac{2^{18}}{2^{15}} \qquad \beta. \frac{4^{28}}{4^{26}} \qquad \gamma. \frac{6^{10}}{6^9}$$

### Λύση

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $\frac{a^μ}{a^ν} = a^{μ-ν}$  έχουμε:

$$\alpha. \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8 \qquad \beta. \frac{4^{28}}{4^{26}} = 4^{28-26} = 4^2 = 16$$

$$\gamma. \frac{6^{10}}{6^9} = 6^{10-9} = 6^1 = 6$$

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$\alpha. (5^{20} \cdot 5^{10} \cdot 5^8) : 5^{35} \qquad \beta. 4^{16} : (4^8 \cdot 4^5 \cdot 4^2)$$

### Λύση

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων έχουμε:

$$\alpha. (5^{20} \cdot 5^{10} \cdot 5^8) : 5^{35} = 5^{20+10+8} : 5^{35} = 5^{38} : 5^{35} = 5^{38-35} = 5^3 = 125$$

$$\beta. 4^{16} : (4^8 \cdot 4^5 \cdot 4^2) = 4^{16} : 4^{8+5+2} = 4^{16} : 4^{15} = 4^{16-15} = 4^1 = 4$$

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α.  $4^3 \cdot x = 4^5$

β.  $16 \cdot x = 2^5$

γ.  $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot x = 3^3$

**Λύση**

α.  $4^3 \cdot x = 4^5$ . Άρα  $x = 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2 = 16$ .

β.  $16 \cdot x = 2^5$ . Άρα  $x = 2^5 : 16 = 2^5 : 2^4 = 2^{5-4} = 2^1 = 2$ .

Εδώ γράψαμε το 16 ως δύναμη με βάση το 2.

γ.  $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot x = 3^3$ . Άρα  $x = 3^3 : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 3^3 : \frac{1^2}{3^2} = 3^3 \cdot \frac{3^2}{1^2} = 3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5 = 243$ .

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	y	$(x+y)^2 - x^2 \cdot y^3$
+2	-1	
-2	+1	

**Λύση**

Όταν  $x = +2$  και  $y = -1$  έχουμε:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 - x^2 \cdot y^3 &= [2+(-1)]^2 - (+2)^2 \cdot (-1)^3 = (2-1)^2 - (+2)^2 \cdot (-1)^3 = \\ &= (+1)^2 - (+2)^2 \cdot (-1)^3 = +1 - 4 \cdot (-1) = 1 - (-4) = 1 + 4 = +5\end{aligned}$$

Όταν  $x = -2$  και  $y = +1$  έχουμε:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 - x^2 \cdot y^3 &= [-2+(+1)]^2 - (-2)^2 \cdot (+1)^3 = (-2+1)^2 - (-2)^2 \cdot (+1)^3 = \\ &= (-1)^2 - (-2)^2 \cdot (+1)^3 = +1 - (+4) \cdot (+1) = 1 - 4 = -3\end{aligned}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παρακάτω παράστασης:

$$A = 2^{x+2} : 16 - 32 : 2^{x-2}, \quad \text{όταν } x = 4.$$

**Λύση**

Αντικαθιστούμε το x με 4 στην παράσταση. Άρα:  $A = 2^{4+2} : 16 - 32 : 2^{4-2}$ .

Γράφουμε το 16 και το 32 ως δυνάμεις με βάση το 2 και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των δυνάμεων. Άρα θα έχουμε:

$$A = 2^{4+2} : 2^4 - 2^5 : 2^{4-2} = 2^6 : 2^4 - 2^5 : 2^2 = 2^{6-4} - 2^{5-2} = 2^2 - 2^3 = 4 - 8 = -4$$

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α.  $5^{10} \cdot 5^{-10}$

β.  $4^{-2} \cdot 4^3$

γ.  $10^0 : 10^{-1}$

**Λύση**

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$  έχουμε:

α.  $5^{10} \cdot \frac{1}{5^{10}} = \frac{5^{10}}{5^{10}} = 1$

β.  $4^{-2} \cdot 4^3 = \frac{1}{4^2} \cdot 4^3 = \frac{4^3}{4^2} = 4^{3-2} = 4^1 = 4$

γ.  $10^0 : 10^{-1} = 10^0 : \frac{1}{10^1} = 10^0 : \frac{1}{10} = 10^0 \cdot 10 = 1 \cdot 10 = 10$

**Παρατήρηση:** Η άσκηση μπορεί να λυθεί επίσης, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα:

$$a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu} \quad \text{ή} \quad a^{\mu} : a^{\nu} = a^{\mu-\nu}.$$

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α.  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

β.  $\left(\frac{3}{8}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-4}$

γ.  $(3^{+2} \cdot 3^{-4})^{+2}$

δ.  $(4^3 : 4^{-2})^{-1}$

**Λύση**

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των δυνάμεων έχουμε:

α.  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{3^2}{1} \cdot \frac{2^3}{3^3} = 3^{2-3} \cdot 2^3 = 3^{-1} \cdot 2^3 = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}$

Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα :  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$

β.  $\left(\frac{3}{8}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-4} = \left(\frac{8}{3}\right)^3 : \left(\frac{8}{1}\right)^4 = \frac{8^3}{3^3} : \frac{8^4}{1} = \frac{8^3}{3^3} \cdot \frac{1}{8^4} = \frac{1}{3^3} \cdot 8^{3-4} = \frac{1}{3^3} \cdot 8^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{216}$

γ.  $(3^{+2} \cdot 3^{-4})^{+2} = [3^{2+(-4)}]^{+2} = (3^{2-4})^{+2} = (3^{-2})^{+2} = 3^{(-2)(+2)} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

δ.  $(4^3 : 4^{-2})^{-1} = \left(4^3 : \frac{1}{4^2}\right)^{-1} = (4^3 \cdot 4^2)^{-1} = (4^{3+2})^{-1} = (4^5)^{-1} = 4^{5(-1)} = 4^{-5} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024}$

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	$x^{-2}$	$\frac{1}{x} + x^{+2} + x^3 - x^{-1}$
2		
-3		
-2		

### Λύση

Όταν  $x = +2$  έχουμε:

$$\bullet x^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \frac{1}{x} + x^{+2} + x^3 - x^{-1} = \frac{1}{2} + 2^{+2} + 2^3 - 2^{-1} = \frac{1}{2} + 4 + 9 - \frac{1}{2} = 13$$

Όταν  $x = -3$  έχουμε:

$$\bullet x^{-3} = (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{x} + x^{+2} + x^3 - x^{-1} &= \frac{1}{-3} + (-3)^2 + (-3)^3 - (-3)^{-1} = -\frac{1}{3} + 9 - 27 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3} + 9 - 27 - \frac{1}{3} = -18 \end{aligned}$$

Όταν  $x = -2$

$$\bullet x^{-2} = (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{x} + x^{+2} + x^3 - x^{-1} &= \frac{1}{-2} + (-2)^2 + (-2)^3 - (-2)^{-1} = -\frac{1}{2} + 4 - 8 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} + 4 - 8 + \frac{1}{2} = -4 \end{aligned}$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = 3^{x-4} + 2^{x-2} - 3^{-x+2} + 3^{x-3}$ , όταν  $x = 2$ .

### Λύση

Αντικαθιστούμε το  $x$  με 2 και έχουμε:

$$A = 3^{2-4} + 2^{2-2} - 3^{-2+2} + 3^{2-3} = 3^{-2} + 2^0 - 3^0 + 3^{-1} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^1} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4}{9}$$

Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

α. 68.000.000.000

β. 0,00000000075

**Λύση**

α.  $68.000.000.000 = 68 \cdot 1.000.000.000 = 68 \cdot 10^9$  ή  $6,8 \cdot 10^{10}$ .

β.  $0,00000000075 = 7,5 \cdot 10^{-10}$

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α.  $518.000.000 \cdot 0,000031$

β.  $102.000.000 : 170.000$

**Λύση**

α.  $518.000.000 = 5,18 \cdot 10^8$ ,  $0,000031 = 3,1 \cdot 10^{-5}$ .

Άρα:  $518.000.000 \cdot 0,000031 = 5,18 \cdot 10^8 \cdot 3,1 \cdot 10^{-5} = 16,058 \cdot 10^{8+(-5)} = 16,058 \cdot 10^3$ .

β.  $102.000.000 = 1,02 \cdot 10^{-8}$ ,  $170.000 = 1,7 \cdot 10^5$ .

Άρα:  $102.000.000 : 170.000 = 1,02 \cdot 10^{-8} \cdot 1,7 \cdot 10^5 = 0,6 \cdot 10^{-13}$ .

Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α.  $(4 \cdot 10^8)^2$

β.  $(3 \cdot 10^{-6})^3$

γ.  $(2 \cdot 10^{-8})^2$

**Λύση**

α.  $(4 \cdot 10^8)^2 = 4^2 \cdot (10^8)^2 = 16 \cdot 10^{16}$

β.  $(3 \cdot 10^{-6})^3 = 3^3 \cdot (10^{-6})^3 = 27 \cdot 10^{-18}$

γ.  $(2 \cdot 10^{-8})^2 = 2^2 \cdot (10^{-8})^2 = 4 \cdot 10^{-16}$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2,1 \cdot 10^8 + 4,2 \cdot 10^8 - 1,5 \cdot 10^8$$

**Λύση**

$$A = 2,1 \cdot 10^8 + 4,2 \cdot 10^8 - 1,5 \cdot 10^8 = (2,1 + 4,2 - 1,5) \cdot 10^8 = 4,8 \cdot 10^8$$

Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:

α.  $6,14 \cdot 10^8$  .....  $6,04 \cdot 10^8$

β.  $5,3 \cdot 10^4$  .....  $14,8 \cdot 10^4$

**Λύση**

α.  $6,14 > 6,04$  άρα  $6,14 \cdot 10^8 > 6,04 \cdot 10^8$

β.  $5,3 < 14,8$  άρα  $5,3 \cdot 10^4 < 14,8 \cdot 10^4$



**Να βρείτε πόσες φορές είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος ο αριθμός  $6,25 \cdot 10^5$  από τον αριθμό  $625 \cdot 10^8$ .**

**Λύση**

Είναι φανερό ότι:  $6,25 \cdot 10^5 < 625 \cdot 10^8$ .

Επίσης  $6,25 \cdot 10^5 = 625 \cdot 10^3$ . Άρα  $625 \cdot 10^8 : 625 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^{8-3} = 10^5$ .

Άρα ο  $6,25 \cdot 10^5$  είναι  $10^5$  φορές μικρότερος.

**Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους αριθμούς:**

α.  $\frac{1}{3}$

β.  $-\frac{3}{20}$

γ.  $\frac{3}{40}$

δ.  $-\frac{8}{5}$

**Λύση**

α.  $\frac{1}{3} = 0,333333 = 0,\bar{3}$     β.  $-\frac{3}{20} = -0,15$     γ.  $\frac{3}{40} = 0,075$     δ.  $-\frac{8}{5} = -1,6$

**Να γράψετε με κλασματική μορφή τον αριθμό  $1,\overline{45}$ .**

**Λύση**

Θέτουμε  $x = 1,\overline{45}$ . Άρα  $x = 1,454545\dots$

Πολλαπλασιάζουμε με το 100:

$$100 \cdot x = 100 \cdot 1,454545\dots$$

$$100x = 145,4545\dots$$

Γράφουμε το δεκαδικό ως άθροισμα:

$$100x = 145 + 0,4545\dots$$

Αφαιρούμε το x απο τα δύο μέλη:

$$100x - x = 145 + 0,4545 - x$$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$(100 - 1)x = 145 + 0,4545 - 1,4545\dots$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$99x = 145 - 1$$

$$99x = 144$$

$$x = \frac{144}{99}$$