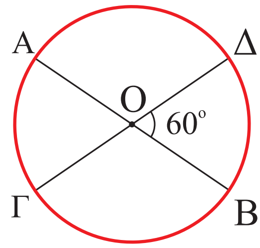
ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ
ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ - ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Οι διάμετροι στον διπλανό κύκλο σχηματίζουν γωνία 60^o. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από τις διαμέτρους αυτές.



Λύση

Οι γωνίες $B\hat{O}\Delta$ και $\Gamma\hat{O}A$ είναι ίσες ως κατακορυφήν.

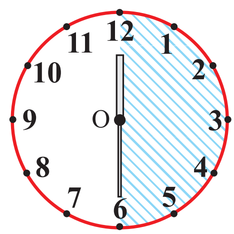
Άρα: $\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{A\Gamma} = 60^o$.

Επίσης οι γωνίες $\Gamma\hat{O}B$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι ίσες ως κατακορυφήν.
Όπως γνωρίζουμε ο κύκλος αντιστοιχεί σε γωνια 360^o.

Άρα: $\Gamma\hat{O}B + A\hat{O}\Delta = 360^o - \left(B\hat{O}\Delta + \Gamma\hat{O}A\right) = 360^o - \left(60^o + 60^o\right) = 360^o - 120^o = 240^0$

Συνεπώς: $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma B} = \dfrac{240^o}{2} = 120^o$

Να υπολογίσετε πόσων μοιρών είναι το τόξο που διαγράφει η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 30 λεπτά. Σε πόσο χρόνο η άκρη του λεπτοδείκτη διαγράφει τόξο 90^o ;

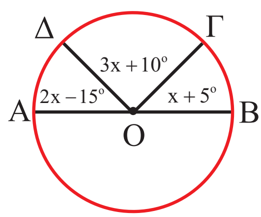


Λύση

Η άκρη του λεπτοδείκτη διαγράφει έναν κύκλο, δηλαδή 360^o σε 60 λεπτά. Άρα σε 30 λεπτά θα διαγράψει τόξο ίσο με:

$$\frac{30}{60} \cdot 360^o = \frac{1}{2} \cdot 360^o = 180^o$$

Η άκρη του ωροδείκτη διαγράφει τόξο 360^o σε 12 ώρες. Άρα τόξο 90^o διαγράφει η άκρη του ωροδείκτη σε: $\dfrac{90^o}{360^o} \cdot 12 = \dfrac{1}{4} \cdot 12 = 3$ ώρες



Να υπολογίσετε πόσων μοιρών είναι καθένα από τα τόξα:

$\overset{\frown}{A\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$

Λύση

Αφού το ημικύκλιο είναι τόξο 180^o θα ισχύει:

$\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{B\Gamma} = 180^o$ ή $\left(2x - 15^o\right) + \left(3x + 10^o\right) + \left(x + 5^o\right) = 180^o$

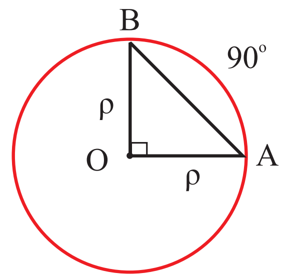
ή $2x - 15^o + 3x + 10^o + x + 5^o = 180^o$ ή $6x = 180^o$ ή $x = 30^o$

Άρα: $\overset{\frown}{A\Delta} = 2x - 15 = 2 \cdot 30 - 15 = 45^o$, $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 3x + 10 = 3 \cdot 30 + 10 = 100^o$,

$\overset{\frown}{\Gamma B} = x + 5 = 30 + 5 = 35^o$.

Να γράψετε έναν κύκλο (Ο,ρ) και μία επίκεντρη γωνία του $A\hat{O}B$ που να βαίνει σε τεταρτοκύκλιο. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\hat{O}B$.

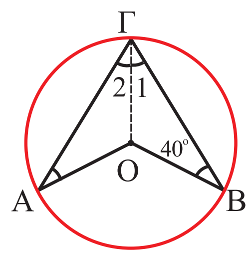
Λύση



Γνωρίζουμε ότι κάθε τεταρτοκύκλιο είναι 90°. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές αφού $AO = OB = \rho$. Άρα $\hat{A} = \hat{B}$. Επίσης ξέρουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{O} = 180^o$ ή $2\hat{A} + 90^0 = 180^o$ ή $2\hat{A} = 180^o - 90^o = 90^o$ ή $\hat{A} = 45^o$. Άρα $\hat{A} = \hat{B} = 45^o$.

Δίνεται επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = 100^o$ σε κύκλο (Ο,ρ) και η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}A$ τέτοια ώστε το Ο να περιέχεται σ' αυτή και $O\hat{B}\Gamma = 40^o$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $B\hat{\Gamma}A$ και $O\hat{A}\Gamma$.

Λύση



Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}A$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

Άρα θα ισχύει: $B\hat{\Gamma}A = \dfrac{A\hat{O}B}{2} = \dfrac{100^o}{2} = 50^o$

Αν φέρουμε την ακτίνα ΟΓ θα έχουμε: $O\Gamma = OB = \rho$, δηλαδή

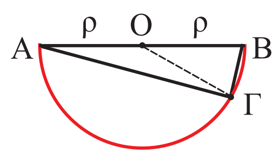
το τρίγωνο ΟΒΓ θα είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = \widehat{\Gamma_1} = 40^o$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι ισχύει: $\widehat{\Gamma_2} = B\hat{\Gamma}A - \widehat{\Gamma_1} = 50^o - 40^o = 10^o$

Και επειδή $OA = O\Gamma = \rho$, το τρίγωνο ΑΟΓ θα είναι ισοσκελές, οπότε:

$$\hat{A} = \widehat{\Gamma_2} = 10^o \quad \text{ή} \quad O\hat{A}\Gamma = 10^o$$

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 6cm$ και σημείο το Γ του ημικυκλίου , ώστε $\overset{\frown}{A\Gamma} = 3\overset{\frown}{\Gamma B}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

Έχουμε: $\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma B} = \overset{\frown}{AB}$ ή $3\overset{\frown}{\Gamma B} + \overset{\frown}{\Gamma B} = 180^o$ ή

$4\overset{\frown}{\Gamma B} = 180^o$ ή $\overset{\frown}{\Gamma B} = 45^o$.

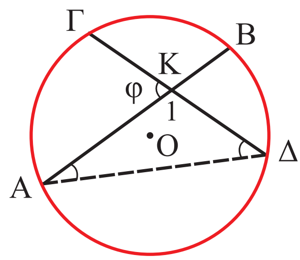
Άρα $\overset{\frown}{A\Gamma} = 3 \cdot 45^o = 135^o$.

Οπότε $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \dfrac{45^o}{2} = 22{,}5^o$, $\hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \dfrac{135^o}{2} = 67{,}5^o$,

$\hat{\Gamma} = 180^o - (22{,}5^o + 67{,}5^o)$ ή $\hat{\Gamma} = 90^o$

Σε κύκλο κέντρου Ο, οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Κ. Να δείξετε ότι η γωνία $\hat{\varphi}$ δίνεται από τη σχέση: $\hat{\varphi} = \dfrac{\overset{\frown}{Β\Delta} + \overset{\frown}{Α\Gamma}}{2}$, όπου $\overset{\frown}{Β\Delta}$, $\overset{\frown}{Α\Gamma}$ τα μέτρα των τόξων.

Λύση



Φέρνουμε τη χορδή ΑΔ. Για τις εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{Α}$ και $\hat{\Delta}$ ισχύουν: $\hat{Α} = \dfrac{\overset{\frown}{Β\Delta}}{2}$, $\hat{\Delta} = \dfrac{\overset{\frown}{Α\Gamma}}{2}$ (1)

Στο τρίγωνο ΚΑΔ έχουμε:

$$\hat{Κ}_1 = 180° - \hat{Α} - \hat{\Delta} \quad \text{και} \quad \hat{\varphi} = 180° - \hat{Κ}_1 \left(\hat{\varphi},\ \hat{Κ}_1 \text{ παραπληρωματικές}\right)$$

Οπότε από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

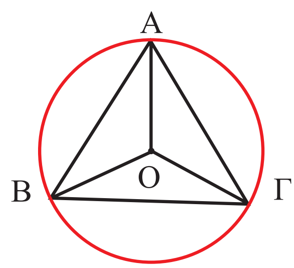
$$\hat{\varphi} = 180° - \left(180° - \hat{Α} - \hat{\Delta}\right) = 180° - 180° + \hat{Α} + \hat{\Delta} = \hat{Α} + \hat{\Delta} \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{\overset{\frown}{Β\Delta}}{2} + \frac{\overset{\frown}{Α\Gamma}}{2} = \frac{\overset{\frown}{Β\Delta} + \overset{\frown}{Α\Gamma}}{2}$$

Σε κύκλο (Ο,ρ) να πάρετε δύο διαδοχικές επίκεντρες γωνίες $Α\hat{Ο}Β = 140^o$ και $Β\hat{Ο}\Gamma = 60^o$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου στο οποίο βαίνει.



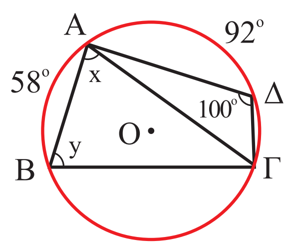
Άρα θα έχουμε:

$\overset{\frown}{ΑΒ} = 140^o$, $\overset{\frown}{Β\Gamma} = 60^o$, $\overset{\frown}{\GammaΑ} = 360^o - \left(140^o + 60^o\right) = 160^o$.

Άρα οι γωνίες του τριγώνου είναι:

$$\hat{Α} = \frac{60^o}{2} = 30^o,\quad \hat{Β} = \frac{160^o}{2} = 80^o,\quad \hat{\Gamma} = \frac{140^o}{2} = 70^o.$$

Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{x}$, $\hat{y}$ στο διπλανό σχήμα.



Λύση

Έχουμε: $\overset{\frown}{ΑΒ\Gamma} = 2 \cdot 100^o = 200^o$.

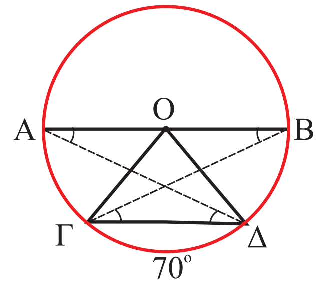
Άρα: $\overset{\frown}{Β\Gamma} = 200^o - 58^o = 142^o$

και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 360^o - \left(200^o + 92^o\right) = 68^o$

Οπότε: $\hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{Β\Gamma}}{2} = \dfrac{142^o}{2} = 71^o$ και $\hat{y} = \dfrac{\overset{\frown}{Α\Gamma}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{Α\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma}}{2} = \dfrac{92^o + 68^o}{2} = 80^o$

Να υπολογίστει το τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$ στο διπλανό σχήμα αν ΑΒ//ΓΔ και $\overset{\frown}{ΓΔ} = 70^o$.

Λύση



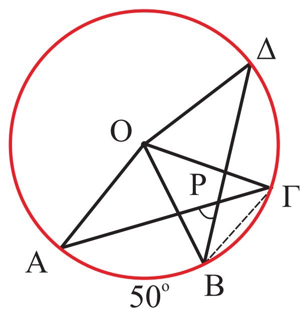
Φέρνουμε τις χορδές ΑΔ και ΒΓ. Επειδή ΑΒ//ΑΓ οι γωνίες $\hat{Α} = \hat{Δ}$ και $\hat{Β} = \hat{Γ}$. Οπότε: $\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΒΔ}$.

Αλλά $\overset{\frown}{ΑΓ} + \overset{\frown}{ΓΔ} + \overset{\frown}{ΒΔ} = 180^o$ ή $\overset{\frown}{ΑΓ} + \overset{\frown}{ΑΓ} + 70^o = 180^o$ ή

$$2\overset{\frown}{ΑΓ} = 180^o - 70^o = 110^o \text{ ή } \overset{\frown}{ΑΓ} = \frac{110^o}{2} = 55^o .$$

Να γράψετε κύκλο (Ο,ρ). Πάρτε δύο τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ} = 50^o$ και $\overset{\frown}{ΓΔ} = 60^o$. Αν οι χορδές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ρ να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Ρ}Β$.

Λύση



Φέρνουμε τη χορδή ΒΓ. Η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{Β} = Δ\hat{Β}Γ$ είναι ίση με : $\hat{Β} = \frac{60^o}{2} = 30^o$. Επίσης $\hat{Γ} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

$Α\hat{Ρ}Β + Β\hat{Ρ}Γ = 180°$ οπότε $Α\hat{Ρ}Β = 180° - Β\hat{Ρ}Γ$

Η γωνία $Β\hat{Ρ}Γ$ είναι ίση με:

$Β\hat{Ρ}Γ = 180° - (Δ\hat{Β}Γ + Α\hat{Γ}Β) = 180° - (30° + 25°) = 180° - 55° = 125°$

Οπότε $Α\hat{Ρ}Β = 180° - 125° = 55°$

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ και τη γωνία $\hat{\varphi}$:

i. Ενός κανονικού 9 - γώνου. **ii. Ενός κανονικού 15 - γώνου.**

Λύση

i. Η κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ του κανονικού εννιαγώνου είναι : $\hat{\omega} = \dfrac{360^{o}}{9} = 40^{o}$

Για την κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ και τη γωνία $\hat{\varphi}$ ενός κανονικού πολυγώνου ισχύει η σχέση:

$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^{o}$ ή $\hat{\varphi} = 180^{o} - \hat{\omega}$ ή $\hat{\varphi} = 180^{o} - 40^{o}$ ή $\hat{\varphi} = 140^{o}$

ii. Ομοίως για το δεκαπεντάγωνο έχουμε:

$\hat{\omega} = \dfrac{360^{o}}{15} = 24^{o}$ και $\hat{\varphi} = 180^{o} - 24^{o}$ ή $\hat{\varphi} = 156^{o}$

Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία:

i. 36^{o} **ii. 20^{o}** **iii. 12^{o}** **iv. $\dfrac{1}{6}$ ορθής**

Λύση

Από τη σχέση: $\hat{\omega} = \dfrac{360^{o}}{\nu}$ έχουμε $\nu = \dfrac{360^{o}}{\hat{\omega}}$, οπότε:

i. $\nu = \dfrac{360^{o}}{36^{o}}$ ή $\nu = 10$ (Κανονικό 10 - γωνο)

ii. $\nu = \dfrac{360^{o}}{20^{o}}$ ή $\nu = 18$ (Κανονικό 18 - γωνο)

iii. $\nu = \dfrac{360^{o}}{12^{o}}$ ή $\nu = 30$ (Κανονικό 30 - γωνο)

iv. $\hat{\omega} = \dfrac{1}{6}$ορθής$ = \dfrac{1}{6}90^{o}$ ή $\hat{\omega} = 15^{o}$, οπότε έχουμε:

$\nu = \dfrac{360^{o}}{15^{o}}$ ή $\nu = 24$ (Κανονικό 24 - γωνο)

Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία $\hat{\omega}=38^o$, ή με γωνία $\hat{\varphi}=155^o$.

Λύση

Έστω ότι υπάρχει κάποιο ν-γωνο με $\hat{\omega}=38^o$. Τότε: $\nu=\dfrac{360^o}{\hat{\omega}}=\dfrac{360^o}{15^o}=9,47$ αδύνατο

αφού ο ν είναι φυσικός αριθμός. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο.

Έστω πάλι, ότι υπάρχει κάποιο ν-γωνο με $\hat{\varphi}=155^o$.

Ισχύει: $\hat{\varphi}+\hat{\omega}=180^o$ ή $\hat{\omega}=180^o-\hat{\varphi}$ ή $\hat{\omega}=180^o-155^o$ ή $\hat{\omega}=25^o$.

Άρα: $\nu=\dfrac{360^o}{\hat{\omega}}=\dfrac{360^o}{25^o}=14,4$ αδύνατο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο.

Κανονικό δεκάγωνο με πλευρά $\lambda = 15$ cm είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Να βρείτε την ακτίνα του ρ και το απόστημά του α.

Λύση

Το δεκάγωνο έχει κεντρική γωνία: $\hat{\omega}=\dfrac{360^o}{10}=36^o$

Από το τυπολόγιο των κανονικών πολυγώνων η πλευρά του δεκαγώνου δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda=2\cdot\rho\cdot\eta\mu\frac{\omega}{2} \quad \text{ή} \quad \rho=\frac{\lambda}{2\cdot\eta\mu\frac{\omega}{2}}=\frac{15}{2\cdot\eta\mu 18^o}=\frac{15}{2\cdot 0,309} \quad \text{ή} \quad \rho\simeq 24,27\text{cm}$$

Το απόστημα α του δεκαγώνου θα είναι:

$$\alpha=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha=24,27\cdot\sigma\upsilon\nu 18^o \quad \text{ή} \quad \alpha\simeq 23,08\text{cm}$$

Ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα ρ = 10cm. Να βρείτε την πλευρά του λ, την περίμετρό του Τ, το απόστημά του α και το εμβαδόν του Ε.

Λύση

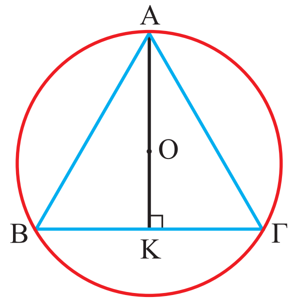
Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει κεντρική γωνία: $\hat{\omega}=\dfrac{360^o}{3}=120^o$

Από τους τύπους έχουμε: $\lambda=2\cdot\rho\cdot\eta\mu\dfrac{\omega}{2}$ ή

$$\lambda=2\cdot 10\cdot\eta\mu\frac{120^o}{2}=2\cdot 10\cdot\eta\mu 60^o=2\cdot 10\cdot 0,866 \quad \text{ή} \quad \lambda\simeq 17,32\text{cm}$$

Η περίμετρος Τ είναι: $T = \nu \cdot \lambda = 3 \cdot 17,32$ ή $T \simeq 51,96\text{cm}$

Το απόστημα α είναι: $\alpha = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o = 10 \cdot \frac{1}{2}$ ή $\alpha = 5\text{cm}$



Για τον υπολογισμό του εμβαδού παρατηρούμε το σχήμα και συμπεραίνουμε ότι για την εύρεσή του θα πρέπει να βρούμε το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή το:

$$AK = AO + OK = \rho + \alpha = 10 + 5 \quad \text{ή} \quad AK = 15\text{cm}$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι:

$$E = \frac{1}{2}B\Gamma \cdot AK = \frac{1}{2}17,32 \cdot 15 \quad \text{ή} \quad E = 129,9\,\text{cm}^2$$

Ένα κανονικό πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ = 24cm και έχει απόστημα $\alpha = 12\sqrt{3}$ cm . Να βρεθούν:

i. Η πλευρά του λ

ii. Η κεντρική γωνία $\hat{\omega}$

iii. Η περίμετρός του Τ

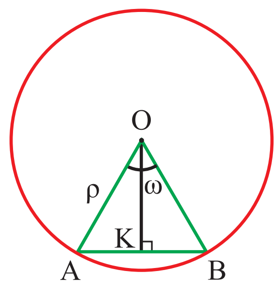
iv. Το εμβαδόν του Ε

Λύση

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε από το Π. θεώρημα: $OK^2 + KA^2 = OA^2$ ή

$$\alpha^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = \rho^2 \text{ ή } \alpha^2 + \frac{\lambda^2}{4} = \rho^2 \text{ ή } \frac{\lambda^2}{4} = \rho^2 - \alpha^2 \text{ ή } \lambda^2 = 4\left(\rho^2 - \alpha^2\right) \text{ ή}$$

$$\lambda^2 = 4\left[24^2 - \left(12\sqrt{3}\right)^2\right] = 4(576 - 432) = 576 \text{ ή } \lambda = 24\text{cm}$$



ii. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι όταν σε ένα πολύγωνο ισχύει: λ = ρ, τότε το πολύγωνο είναι κανονικό εξάγωνο

οπότε για ν = 6 έχουμε: $\hat{\omega} = \frac{360^o}{\nu} = \frac{360^o}{6}$ ή $\hat{\omega} = 60^o$

iii. Η περίμετρο Τ θα είναι: $T = 6 \cdot \lambda = 6 \cdot 24$ ή $T = 144\text{cm}$

iv. Το εμβαδόν ενός κανονικού εξαγώνου αποτελείται από το εμβαδόν έξι ισοσκελών τριγώνων με ίσα εμβαδά. Το εμβαδόν ενός τέτοιου τριγώνου π.χ. του ΟΑΒ είναι:

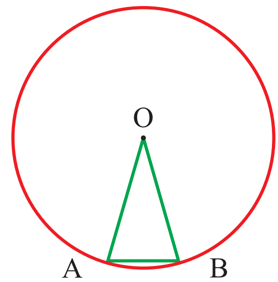
$$E_1 = \frac{1}{2}AB \cdot OK = \frac{1}{2}\lambda \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad E_1 \simeq 249,41\text{cm}^2$$

Επομένως το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου θα είναι:

$$E_2 = 6 \cdot 249,44 \quad \text{ή} \quad E_2 = 1496,46\,\text{cm}^2$$

Σε κύκλο ακτίνας 6cm να εγγράψετε κανονικό 12-γωνο.

Λύση



Η κεντρική γωνία ενός κανονικού 12-γωνου είναι:

$$\hat{\omega} = \frac{360^o}{12} = 30^o$$

Σε κύκλο (O,6cm) κατασκευάζουμε την επίκεντρη γωνία, $A\hat{O}B = 30^o$. Η χορδή AB είναι η πλευρά του 12-γώνου, οπότε στη συνέχεια χωρίζουμε τον κύκλο σε 12 τόξα χορδής μήκους ίσου με της χορδής AB.

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ
ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ
ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ
ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

α. Να βρεθεί το μήκος κύκλου ακτίνας ρ = 6cm.
β. Να βρεθεί η ακτίνα κύκλου με μήκος Γ = 43,96 cm.
γ. Να βρεθεί το εμβαδόν κυκλικού δίσκου διαμέτρου δ = 2m.

Λύση

α. Είναι: $\Gamma = 2\cdot\pi\cdot\rho = 2\cdot 3{,}14\cdot 6 = 37{,}68\,\text{cm}$

β. Είναι: $\Gamma = 2\cdot\pi\cdot\rho$ ή $\rho = \dfrac{\Gamma}{2\cdot\pi} = \dfrac{43{,}96}{2\cdot 3{,}14} = 7\,\text{cm}$

γ. Το εμβαδόν είναι: $E = \pi\cdot\rho^2 = \pi\cdot\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi\cdot\delta^2}{4}$ ή $E = \dfrac{3{,}14\cdot 2^2}{4} = 3{,}14\,\text{m}^2$

Να βρείτε το μέτρο ενός τόξου:

i. Σε ακτίνια, αν το μέτρο του σε μοίρες είναι 150^o.

ii. Σε μοίρες, αν το μέτρο του σε ακτίνια είναι $\frac{\pi}{3}$ rad.

Λύση

i. Είναι: $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu^o}{180^o}$ ή $\alpha=\frac{\mu^o\cdot\pi}{180^o}=\frac{150^o\cdot\pi}{180^o}$ ή $\alpha=\frac{5\pi}{6}\text{rad}$.

ii. Είναι: $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu^o}{180^o}$ ή $\mu^o=\frac{\alpha\cdot 180^o}{\pi}=\frac{\frac{\pi}{3}\cdot 180^o}{\pi}$ ή $\mu^o=60^o$

Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν διάμετρο 80 cm και έκαναν 6.000 στροφές. Να βρείτε πόση απόσταση διήνησε το ποδήλατο.

Λύση

Όταν οι τροχοί του ποδηλάτου κάνουν μια πλήρη περιστροφή, το ποδήλατο διανύει ίση με το μήκος τους. Άρα για μια πλήρη περιστροφή έχουμε απόσταση:

$$\Gamma=2\cdot\pi\cdot\rho=\delta\cdot\pi=80\cdot 3{,}14=251{,}2\text{cm}=2{,}512\,\text{m}$$

Άρα για 6.000 στροφές των τροχών το ποδήλατο διήνυσε απόσταση ίση με:

$$S=6.000\cdot 2{,}512=15072\,\text{m}=15{,}072\,\text{Km}$$

Οι περίμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 25,12 cm. Να βρείτε τη διαφορά:

i. Των ακτίνων τους **ii. Των διαμέτρων τους**

Λύση

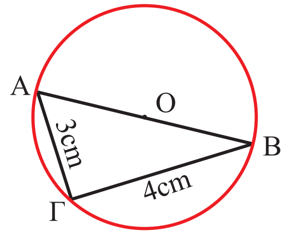
Αν ονομάσουμε ρ_1, ρ_2 τις ακτίνες με $\rho_1>\rho_2$, δ_1, δ_2 τις διαμέτρους, Γ_1, Γ_2 τις περιμέτρους έχουμε:

i. $\Gamma_1-\Gamma_2=25{,}12$ ή $2\pi\rho_1-2\pi\rho_2=25{,}12$ ή $2\pi(\rho_1-\rho_2)=25{,}12$ ή $\rho_1-\rho_2=\frac{25{,}12}{2\cdot 3{,}14}$ ή

$\rho_1-\rho_2=4\,\text{cm}$

ii. $\delta_1-\delta_2=2\rho_1-2\rho_2=2(\rho_1-\rho_2)=2\cdot 4=8\text{cm}$

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την ακτίνα, την διάμετρο, το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.



Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma}=90^{o}$ (βαίνει σε ημικύκλιο)

Άρα: $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ή $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ ή $AB = \sqrt{25}$ ή $AB = 5\,cm$.

Άρα: $\rho = \frac{5}{2} = 2,5\,cm$, $AB = \delta = 5\,cm$

Το μήκος του κύκλου θα είναι: $\Gamma = 2\cdot\pi\cdot\rho = 2\cdot 3,14\cdot 2,5 = 15,7\ cm$

Το εμβαδόν είναι: $E = \pi\cdot\rho^2 = 3,14\cdot 2,5^2 = 19,625\,cm^2$

Τόξο 45^{o} σε κύκλο (Ο,ρ) έχει μήκος 2cm. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου.

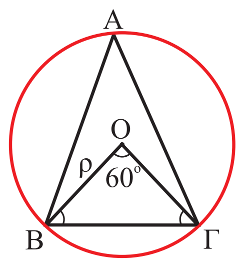
Λύση

Το μήκος S του τόξου είναι:

$$S = \frac{\pi\cdot\rho\cdot\mu^{o}}{180^{o}} \quad \text{ή} \quad \pi\cdot\rho\cdot\mu^{o} = 180^{o}\cdot S \quad \text{ή} \quad \rho = \frac{180^{o}\cdot S}{\pi\cdot\mu^{o}} = \frac{180^{o}\cdot 2}{3,14\cdot 45^{o}} \quad \text{ή} \quad \rho \simeq 2,55\ cm$$

Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{BA\Gamma} = 30^{o}$ και η χορδή ΒΓ = 6cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση



Για την επίκεντρη γωνία $\widehat{BO\Gamma}$ ισχύει:

$$\widehat{BO\Gamma} = 2\cdot\widehat{BA\Gamma} = 2\cdot 30^{o} = 60^{o}$$

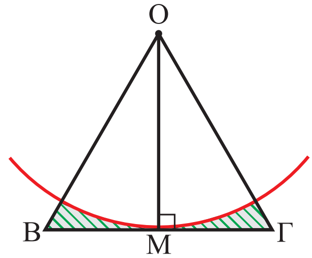
Άρα το τρίγωνο ΒΟΓ θα είναι ισόπλευρο διότι:

$$OB = O\Gamma = \rho,\ \text{οπότε}\ \hat{B} = \hat{\Gamma}\ .$$

Αλλά $\hat{O} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{o}$ ή $\hat{O} + 2\hat{B} = 180^{o}$ ή $2\hat{B} = 180^{o} - 60^{o} = 120^{o}$ ή $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^{o}$.

Συνεπώς $\rho = 6cm$. Το εμβαδόν του κύκλου θα είναι: $E = \pi\cdot\rho^2 = 3,14\cdot 6^2 = 113,04cm^2$

Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΟΒΓ με πλευρά 9cm να γράψετε κύκλο με κέντρο την κορυφή Ο και ακτίνα το ύψος του ΟΜ. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.



Λύση

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΟ έχουμε:

$OB^2 = OM^2 + BM^2$ ή $OM^2 = OB^2 - BM^2$ ή $OM^2 = 7^2 - 4,5^2 = 81 - 20,25 = 60,75$ ή

$OM = \sqrt{60,75}$ ή $OM = 7,79\,cm$.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ΟΒΓ είναι: $E_1 = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7,79 = 35,055\,cm^2$

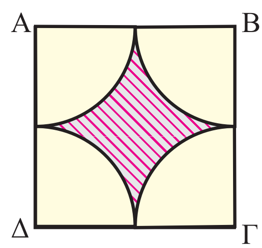
Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που είναι εντός του τριγώνου x είναι:

$$E_2 = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^o}{360^o} = \frac{3,14 \cdot 7,79^2 \cdot 60^o}{360^o} \text{ ή } E_2 = 31,75\,cm^2.$$

Άρα το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους είναι:

$$E = E_1 - E_2 = 35,055 - 31,75 = 3,305\,cm^2$$

Να γράψετε τετράγωνο με πλευρά 26cm και με κέντρα τις κορυφές του και ακτίνα 13cm να γράψετε τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου "σταυρού".



Λύση

Το εμβαδόν των 4 τεταρτοκυκλίων ισούται με το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα 13cm, δηλαδή είναι: $E_1 = \pi \cdot \rho^2 = 3,14 \cdot 13^2 = 530,66\,cm^2$

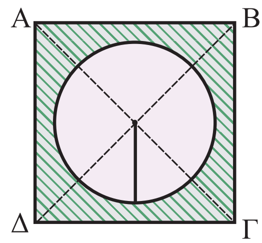
Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:

$$E_2 = AB^2 = 26^2 \quad \text{ή} \quad E_2 = 676\,cm^2$$

Άρα το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου "σταυρού" θα είναι:

$$E = E_1 - E_2 = 676 - 530,66 \quad \text{ή} \quad E = 145,34\,cm^2$$

Μέσα σε ένα χωράφι με σχήμα τετραγώνου, υπάρχει ένας αυτόματος περιστρεφόμενος μηχανισμός ποτίσματος στο κέντρο του. Ο μηχανισμός έχει τη δυνατότητα να ποτίζει σε κυκλική περιοχή, ακτίνας 13,6m. Το χωράφι έχει πλευρά $20\sqrt{3}\,m$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωραφιού που δεν ποτίζεται.



Λύση

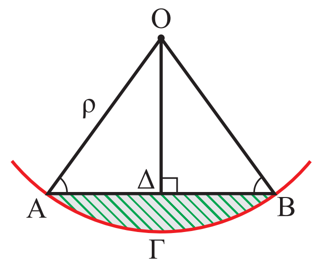
Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι: $E_1 = AB^2 = \left(20\sqrt{3}\,m\right)^2 = 1200\,m^2$

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Ο,ρ) είναι: $E_2 = \pi \cdot \rho^2 = 3,14 \cdot 13,6^2 = 580,77\,m^2$

Άρα το εμβαδόν του χωραφιού που δεν ποτίζεται είναι:

$$E = E_1 - E_2 = 1200 - 580,77 = 619,23\,m^2$$

Στο διπλανό σχήμα η ακτίνα ρ = 12cm και $\hat{A} = 70^o$. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.



Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΟ είναι ισοσκελές άρα: $\hat{A} = \hat{B} = 70^o$, όποτε $\hat{O} = 180^o - \left(70^o + 70^o\right) = 40^o$.

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ ισχύει:

$$\eta\mu A = \frac{O\Delta}{OA} \quad \acute{\eta} \quad O\Delta = OA \cdot \eta\mu A = 12 \cdot 0,94 \quad \acute{\eta} \quad O\Delta = 11,28\,cm$$

Όμοια $\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{OA}$ ή $A\Delta = OA \cdot \sigma\upsilon\nu A = 12 \cdot 0,342$ ή $A\Delta = 4,104\,cm$

Οπότε $AB = 2 \cdot A\Delta$ ή $AB = 8,208\,cm$.

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΓΒ θα είναι:

$$E_1 = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^o}{360^o} = \frac{3,14 \cdot 12^2 \cdot 40^o}{360^o} \quad \acute{\eta} \quad E_1 = 50,24\,cm^2$$

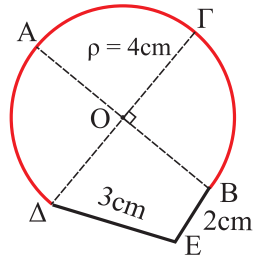
Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ θα είναι:

$$E_2 = \frac{1}{2} AB \cdot O\Delta = \frac{1}{2} 8,208 \cdot 11,28 = 46,29\,cm^2$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$E = E_1 - E_2 = 50,24 - 46,29 = 3,94\,cm^2$$

Να υπολογίσετε την περίμετρο του διπλανού σχήματος.



Λύση

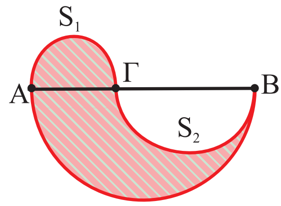
Για να βρούμε την περίμετρο Τ του σχήματος πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα των μηκών των τόξων $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΑΔ}}$ και των τμημάτων ΔΕ και ΕΒ.

Καθένα από τα παραπάνω τόξα είναι 90°, άρα έχει μήκος :

$$S = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^{o}}{180^{o}} = \frac{3{,}14 \cdot 4 \cdot 90^{o}}{180^{o}} = 6{,}28\,\text{cm}$$

Άρα: $$T = 3 \cdot 6{,}28 + 3 + 2 = 23{,}84\,\text{cm}$$

Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν 3 ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ, ΓΒ, ΒΑ και είναι ΑΒ = 12cm επίσης τα τμήματα ΑΓ και ΓΒ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$.



i. Να βρείτε το άθροισμα των τόξων $S_{\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}}$, $S_{\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}}$, $S_{\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}}$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Λύση

i. Ισχύει: $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{1}{3}$ ή $\text{ΓΒ} = 3\text{ΑΓ}$.

Αλλά $\text{ΑΓ} + \text{ΓΒ} = \text{ΑΒ}$ ή $\text{ΑΓ} + 3\text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}$ ή $4\text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}$ ή $\text{ΑΓ} = \frac{12}{4} = 3\,\text{cm}$

Οπότε $$\text{ΒΓ} = \text{ΑΒ} - \text{ΑΓ} = 12 - 3 = 9\,\text{cm}$$

Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$ είναι:

$$S_{\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^{o}}{180^{o}} = \frac{\pi \cdot \frac{\text{ΑΓ}}{2} \cdot 180^{o}}{180^{o}} = \pi \cdot \frac{\text{ΑΓ}}{2} = 3{,}14 \cdot \frac{3}{2} = 4{,}71\,\text{m}$$

Ομοίως $$S_{\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}} = \frac{\pi \cdot \frac{\text{ΓΒ}}{2} \cdot 180^{o}}{180^{o}} = \pi \cdot \frac{\text{ΓΒ}}{2} = 3{,}14 \cdot \frac{9}{2} = 14{,}13\ \text{cm}$$

Είναι: $$S_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot \frac{AB}{2} \cdot 180^o}{180^o} = \pi \cdot \frac{AB}{2} = 3,14 \cdot \frac{12}{2} = 18,84 \text{ cm}$$

Άρα $$S_{\overset{\frown}{A\Gamma}} + S_{\overset{\frown}{B\Gamma}} + S_{\overset{\frown}{AB}} = 37,68 \text{ cm}$$

ii. Για να βρούμε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος θα πρέπει από το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο το τμήμα ΑΒ να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο ΒΓ και μετά να προσθέσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο το τμήμα ΑΓ.

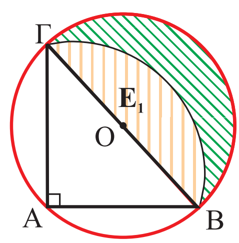
$$E_{AB} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = \frac{3,14 \cdot \left(\frac{12}{2}\right)^2}{2} = 56,52 \text{ cm}^2$$

$$E_{B\Gamma} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2}{2} = \frac{3,14 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2}{2} = 31,79 \text{ cm}^2$$

$$E_{A\Gamma} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2}{2} = \frac{3,14 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} = 3,53 \text{ cm}^2$$

Άρα $$E = E_{AB} + E_{A\Gamma} - E_{B\Gamma} = 28,26 \text{ cm}^2$$

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o, AB = A\Gamma = 9\text{cm}\right)$. Γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα 9cm και τον κύκλο με διάμετρο την πλευρά ΒΓ. Να συγκρίνετε τα εμβαδά του σκιασμένου τμήματος (το τμήμα αυτό λέγεται μηνίσκος) και του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $E = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 = 40,5 \text{cm}^2$

Επίσης από το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 = 81 + 81 = 162$

Άρα $B\Gamma = \sqrt{162}$ ή $B\Gamma = 12,73 \text{cm}$.

Το εμβαδόν του μηνίσκου θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο το ΒΓ αφαιρέσουμε το τμήμα εμβαδού E_1. Το εμβαδόν E_1 θα το βρούμε αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το Α και ακτίνα το ΑΒ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

$$E_{ΒΓ}=\frac{\pi\cdot\rho^2}{2}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{ΒΓ}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{12,73}{2}\right)^2}{2}=\frac{127,21}{2}=63,605\,\text{cm}^2$$

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου είναι:

$$E_{τετ.}=\frac{\pi\cdot(ΑΒ)^2\cdot 90^o}{360^o}=\frac{3,14\cdot 9^2\cdot 90^o}{360^o}=63,585\,\text{cm}^2$$

Άρα $$E_1=E_{\overset{\triangle}{ΑΒΓ}}-E_{τετ.}=23,085\,\text{cm}^2$$

Οπότε το εμβαδόν του μηνίσκου θα είναι: $E_{μην.}=E_{ΒΓ}-E_1=63,605-23,085=40,5$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου.