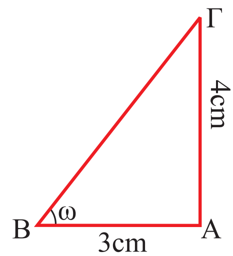
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $AB = 3cm$ και $A\Gamma = 4cm$. Να βρείτε τους λόγους $\dfrac{AB}{A\Gamma}, \dfrac{AB}{B\Gamma}, \dfrac{B\Gamma}{A\Gamma}$.



Λύση

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3\cancel{cm}}{4\cancel{cm}} = 0,75$$

σκουμε την ΒΓ.

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ ή $B\Gamma^2 = (3cm)^2 + (4cm)^2$ ή

$B\Gamma^2 = (9+16)cm^2$ ή

$B\Gamma^2 = 25cm^2$ ή $B\Gamma = 5cm$

Αν η άσκηση αναφέρεται σε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου γνωρίζουμε τις δύο πλευρές του, τότε είναι πολύ πιθανό να χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Έτσι $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{3\cancel{cm}}{5\cancel{cm}} = 0,6$ και $\dfrac{B\Gamma}{A\Gamma} = \dfrac{5\cancel{cm}}{4\cancel{cm}} = 1,25$.

Ποιος από τους λόγους $\dfrac{5}{6}$ και $\dfrac{4}{5}$ είναι μεγαλύτερος;

Λύση

1^{ος} Τρόπος

Σχηματίζουμε τον λόγο $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{5}}$ και τον συγκρίνουμε με την μονάδα.

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{5}} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{25}{24} > 1 \quad \text{άρα} \quad \frac{5}{6} > \frac{4}{5}$$

$2^{ος}$ Τρόπος

Σχηματίζουμε την διαφορά $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}$ και την συγκρίνουμε με το μηδέν.

$\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{25-24}{30}=\frac{1}{30}>0$ άρα $\frac{5}{6}>\frac{4}{5}$.

$3^{ος}$ Τρόπος

$\frac{5}{6}\simeq 0{,}83$, $\frac{4}{5}=0{,}8$. Άρα $\frac{5}{6}>\frac{4}{5}$

Ένα ευθύγραμμο τμήμα α είναι 3 φορές μεγαλύτερο από ένα άλλο τμήμα β. Να βρείτε τους λόγους:

α. $\frac{\alpha}{\beta}$ **β.** $\frac{\beta}{\alpha}$ **γ.** $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ **δ.** $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ **ε.** $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

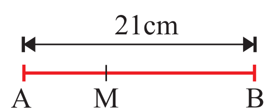
Λύση

Αφού το α είναι 3 φορές μεγαλύτερο του β, τότε ισχύει $\alpha=3\beta$. Οπότε έχουμε:

α. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}=3$ **β.** $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\cancel{\beta}}{3\cancel{\beta}}=\frac{1}{3}$ **γ.** $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{3\beta+\beta}{\beta}=\frac{4\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}=4$

δ. $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{3\beta-\beta}{\beta}=\frac{2\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}=2$ **ε.** $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{3\beta+\beta}{3\beta-\beta}=\frac{4\cancel{\beta}}{2\cancel{\beta}}=2$

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 21 cm. Ένα σημείο Μ χωρίζει το ΑΒ σε δύο τμήματα ΑΜ και ΜΒ ώστε $\frac{AM}{MB}=\frac{3}{4}$. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΑΜ και ΜΒ.



Λύση

Από τον λόγο $\frac{AM}{MB}=\frac{3}{4}$ προκύπτει $4AM=3MB$ ή $AM=\frac{3}{4}MB$ (1).

Επίσης το ΑΒ γράφεται: $AB=AM+MB$. Έτσι:

$AM+MB=21$ ή $\frac{3}{4}MB+MB=21$ ή $4\cdot\frac{3}{4}MB+4MB=21\cdot 4$ ή

$3MB+4MB=84$ ή $7MB=84$ ή $\frac{7}{7}MB=\frac{84}{7}$ ή $MB=12cm$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $AM=\frac{3}{4}\cdot 12=9cm$

Τα σημεία Μ, Ν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 30cm. Τα τμήματα ΑΜ, ΜΝ και ΝΒ είναι ανάλογα των αριθμών 2, 3, 5. Να βρείτε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΜ, ΜΝ και ΝΒ.

Λύση

Τα τμήματα ΑΜ, ΜΝ και ΝΒ είναι ανάλογα των αριθμών 2, 3 και 5 σημαίνει:

$$\frac{AM}{2}=\frac{MN}{3}=\frac{NB}{5}=\lambda \qquad (1)$$

Όπως παρατηρήσατε, εξισώσαμε την παραπάνω αναλογία με λ. Χρησιμοποιούμε δηλαδή βοηθητικό άγνωστο (το λ), τον οποίο θα υπολογίσουμε πρώτα και μετά θα βρούμε τα ΑΜ, ΜΝ και ΝΒ. Προσέξτε πως: Από την σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{AM}{2}=\lambda \text{ άρα } AM=2\lambda \quad \text{και} \quad \frac{MN}{3}=\lambda \text{ άρα } MN=3\lambda \quad \text{και} \quad \frac{NB}{5}=\lambda \text{ άρα } NB=5\lambda .$$

Τα τμήματα ΑΜ, ΜΝ και ΝΒ αποτελούν το $AB=30\text{ cm}$.

Άρα: $2\lambda+3\lambda+5\lambda=30\text{cm}$ ή $10\lambda=30$ ή $\lambda=3$

Έτσι: $AM=2\lambda$ ή $AM=2\cdot 3$ ή $AM=6\text{cm}$

$MN=3\lambda$ ή $MN=3\cdot 3$ ή $MN=9\text{cm}$

$NB=5\lambda$ ή $NB=5\cdot 3$ ή $NB=15\text{cm}$

Αν α, β, γ είναι ευθύγραμμα τμήματα, τέτοια ώστε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha-2\beta}{\beta}=\frac{\gamma-2\delta}{\delta}$

Λύση

1ος Τρόπος

Έχουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ οπότε: $\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}=\lambda \text{ άρα } \alpha=\lambda\beta \\ \frac{\gamma}{\delta}=\lambda \text{ άρα } \gamma=\lambda\delta \end{cases}$

Έτσι έχουμε $\frac{\alpha-2\beta}{\beta}=\frac{\lambda\beta-2\beta}{\beta}=\frac{\cancel{\beta}(\lambda-2)}{\cancel{\beta}}=\lambda-2$ και

$$\frac{\gamma-2\delta}{\delta}=\frac{\lambda\delta-2\delta}{\delta}=\frac{\cancel{\delta}(\lambda-2)}{\cancel{\delta}}=\lambda-2$$

Δηλαδή $\dfrac{\alpha-2\beta}{\beta}=\lambda-2$ και $\dfrac{\gamma-2\delta}{\delta}=\lambda-2$. Άρα $\dfrac{\alpha-2\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma-2\delta}{\delta}$.

2ος Τρόπος

Αφαιρούμε τον αριθμό 2 από τα δύο μέλη της δεδομένης σχέσης:

$$\frac{\alpha}{\beta}-2=\frac{\gamma}{\delta}-2 \text{ ή } \overset{1}{\frac{\alpha}{\beta}}-\overset{\beta}{\frac{2}{1}}=\overset{1}{\frac{\gamma}{\delta}}-\overset{\delta}{\frac{2}{1}} \text{ ή}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{2\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}-\frac{2\delta}{\delta} \text{ ή } \frac{\alpha-2\beta}{\beta}=\frac{\gamma-2\delta}{\delta}$$

Αν έπρεπε να δείξουμε ότι $\dfrac{\alpha+3\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma+3\delta}{\delta}$ καταλαβαίνετε ότι θα προσθέταμε και στα δύο μέλη της $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ τον αριθμό 3.

Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα $AB = 2cm$ και $\Gamma\Delta = 8cm$.

α. Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{\Gamma\Delta}{AB}$

β. Αν καθένα ευθύγραμμο τμήμα αυξηθεί κατά 4cm να υπολογίσετε πόσο θα είναι ο νέος λόγος $\dfrac{\Gamma\Delta}{AB}$.

Λύση

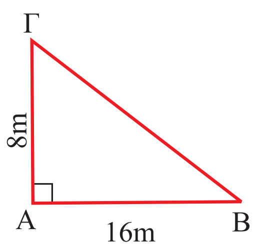
α. $\dfrac{\Gamma\Delta}{AB}=\dfrac{8\cancel{cm}}{2\cancel{cm}}=4$

β. Αν αυξηθούν τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ κατά 4cm θα γίνουν:

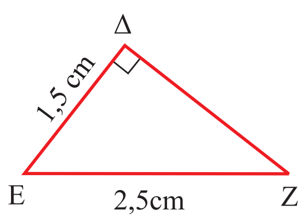
$AB=2cm+4cm=6cm$, $\Gamma\Delta=8cm+4cm=12cm$ και τότε $\dfrac{\Gamma\Delta}{AB}=\dfrac{12\cancel{cm}}{6\cancel{cm}}=2$

Να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των οξειών γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

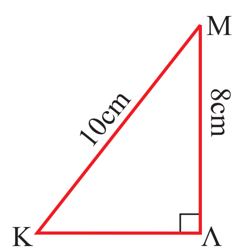
i.



ii.



iii.



Λύση

i. $\varepsilon\varphi B = \dfrac{A\Gamma}{AB} = \dfrac{8m}{16m} = 0,5$, $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{16m}{8m} = 2$

ii. Θα υπολογίσουμε πρώτα την ΔΖ με Πυθαγόρειο Θεώρημα.

$$\Delta Z^2 = EZ^2 - E\Delta^2 \ \text{ ή } \ \Delta Z^2 = 2,5^2 - 1,5^2 \text{ ή}$$

$$\Delta Z^2 = 6,25 - 2,25 \ \text{ ή } \ \Delta Z^2 = 4 \ \text{ ή } \ \Delta Z = 2$$

$$\text{Έτσι } \varepsilon\varphi E = \frac{\Delta Z}{E\Delta} = \frac{2m}{1,5m} = \frac{4}{3} \ \text{ και } \ \varepsilon\varphi Z = \frac{E\Delta}{\Delta Z} = \frac{1,5m}{2m} = 0,75$$

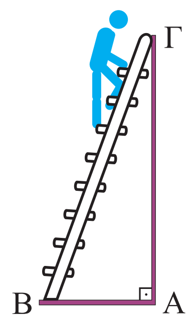
Παρατηρήσαμε λοιπόν πως αν ζητείται η εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και μας δίνεται η υποτείνουσά του τότε χρησιμοποιούμε πυθαγόρειο Θεώρημα.

iii. Και εδώ θα υπολογίσουμε με πυθαγόρειο θεώρημα την ΚΛ. Έχουμε:

$$K\Lambda^2 = KM^2 - M\Lambda^2 \ \text{ ή } \ K\Lambda^2 = 10^2 - 8^2 \ \text{ ή } \ K\Lambda^2 = 100 - 64 \ \text{ ή } \ K\Lambda^2 = 36 \ \text{ ή } \ K\Lambda = 6$$

$$\text{Άρα } \varepsilon\varphi K = \frac{8m}{6m} = \frac{4}{3} \ \text{ και } \ \varepsilon\varphi M = \frac{6m}{8m} = 0,75 .$$

Τεχνίτης τοποθέτησε τη βάση της σκάλας σε απόσταση 1,5 m από τον κάθετο τοίχο ΑΓ και ανέβηκε σε ύψος 6m. Ποια είναι η κλίση της σκάλας;

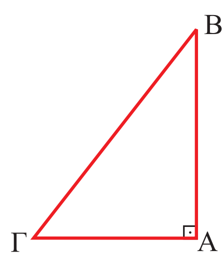


Λύση

Δίνεται ότι $AB = 1,5m$ και $A\Gamma = 6m$. Έτσι: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{A\Gamma}{AB} = \dfrac{6m}{1,5m} = 4$.

Δηλαδή η κλίση της σκάλας είναι 400%.

Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο οξείων γωνιών Β και Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι αντίστροφοι αριθμοί.



Λύση

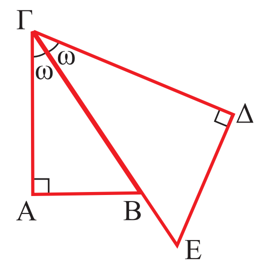
Αντίστροφοι λέγονται δύο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι ίσο με 1.

$$\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} \ \text{ και } \ \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} .$$

$$\text{Έτσι } \varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{A\Gamma}{AB} \cdot \frac{AB}{A\Gamma} = 1 .$$

Άρα οι εφΒ και εφΓ είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι ορθογώνια με τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ ορθές και τις γωνίες της κορυφής Γ ίσες. Να αποδείξετε ότι: $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Gamma \cdot E\Delta$.

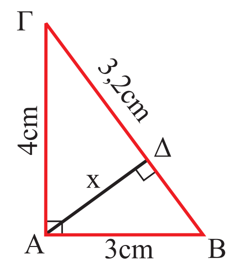


Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{E\Delta}{\Gamma\Delta}$.

Από αυτές τις σχέσεις φαίνεται ότι τα πρώτα μέλη είναι ίσα, άρα θα είναι ίσα και τα δεύτερα μέλη. Δηλαδή: $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{E\Delta}{\Gamma\Delta}$ οπότε $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Gamma \cdot E\Delta$.

Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 90$, αν γνωρίζετε ότι $AB = 3cm$, $A\Gamma = 4cm$ και $\Gamma\Delta = 3{,}2cm$.



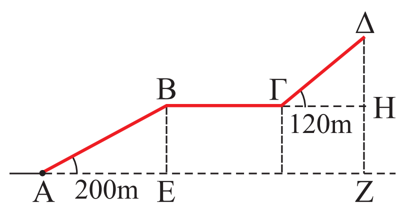
Λύση

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν κοινή την γωνία Γ. Αυτά είναι τα ΑΒΓ και ΑΓΔ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ: $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ ή $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Στο τρίγωνο ΑΓΔ: $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$ ή $0{,}75 = \dfrac{x}{3{,}2}$ ή $x = 0{,}75 \cdot 3{,}2cm$ ή $x = 2{,}4cm$

Η κλίση του ανηφορικού δρόμου ΑΒ είναι 10%. Να υπολογίσετε την κλίση του δρόμου ΓΔ αν γνωρίζετε ότι το σημείο Δ βρίσκεται 44m ψηλότερα από το Α.



Λύση

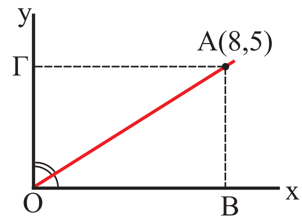
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$\varepsilon\varphi A = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$ αλλά $\varepsilon\varphi A = \dfrac{BE}{AE}$. Έτσι: $0{,}1 = \dfrac{BE}{200}$ ή $BE = 20m$

Ισχύει ακόμα ότι $\Delta Z = 44$ m. Άρα $\Delta H = \Delta Z - ZH = \Delta Z - BE = 44 - 20$, άρα $\Delta H = 24m$.

Στο τρίγωνο ΓΔΗ έχουμε : $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{\Delta H}{\Gamma H} = \dfrac{24m}{120m} = 0{,}2$. Άρα η κλίση του δρόμου ΓΔ είναι 20%.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy δίνεται σημείο Α(8,5). Να υπολογίσετε τις εφαπτόμενες των γωνιών $x\hat{O}A$ και $y\hat{O}A$.



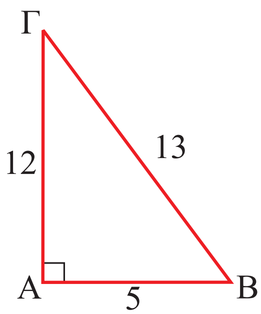
Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε: $εφ\left(x\hat{O}A\right)=\frac{AB}{OB}=\frac{5}{8}$, αφού ισχύει $AB=OΓ=5$.

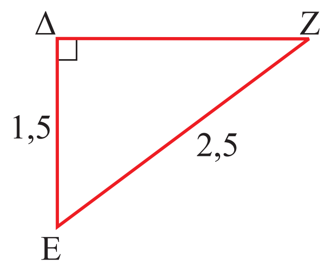
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε: $εφ\left(y\hat{O}A\right)=\frac{AΓ}{OΓ}=\frac{8}{5}$, αφού ισχύει $AΓ=OB=8$.

Να υπολογιστούν το ημίτονο και το συνημίτονο των οξειών γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

α.



β.



Λύση

α. Είναι: $ημB=\frac{AΓ}{BΓ}=\frac{12}{13}$, $συνB=\frac{AB}{BΓ}=\frac{5}{13}$ και

$ημΓ=\frac{AB}{BΓ}=\frac{5}{13}$, $συνΓ=\frac{AΓ}{BΓ}=\frac{12}{13}$

β. Με Πυθαγόρειο θεώρημα θα υπολογίσουμε την ΔΖ.

$ΔZ^2+ΔE^2=EZ^2$ ή $ΔZ^2=EZ^2-ΔE^2$ ή $ΔZ^2=2,5^2-1,5^2$ ή

$ΔZ^2=6,25-2,25$ ή $ΔZ^2=4$

Άρα $ΔZ=\sqrt{4}$ ή $ΔZ=2$

Άρα $ημE=\frac{ΔZ}{EZ}=\frac{2}{2,5}=0,8$, $συνE=\frac{ΔE}{EZ}=\frac{1,5}{2,5}=0,6$

και $ημZ=\frac{ΔE}{EZ}=\frac{1,5}{2,5}=0,6$, $συνZ=\frac{ΔZ}{EZ}=\frac{2}{2,5}=0,8$

Αν ω και φ, οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, να βρείτε ποιες τιμές μπορούν να πάρουν οι παρακάτω παραστάσεις.

α. $\mathbf{A = 1 + ημω}$ **β.** $\mathbf{B = 3 - 2συνφ}$ **γ.** $\mathbf{Γ = 2 + ημω - 3συνφ}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $0 < ημω < 1$ και $0 < συνω < 1$.

Έτσι έχουμε:

α. $0 < ημω < 1$ και προσθέτουμε σε όλα τα μέλη της ανισότητας το 1.

Επομένως: $0 + 1 < ημω + 1 < 1 + 1$. Άρα $1 < A < 2$.

β. Ισχύει $0 < συνφ < 1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανισότητας με –2, οπότε αλλάζει η φορά της ανισότητας.

Δηλαδή: $(-2)\cdot 0 > (-2)συνφ > (-2)\cdot 1$ ή $0 > -2συνφ > -2$

Προσθέτουμε στα μέλη της ανισότητας το 3 και έχουμε:

$$3 + 0 > 3 - 2συνφ > 3 + (-2) \text{ ή } 3 > B > 1$$

γ. Ισχύει $0 < συνφ < 1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανισότητας με –3, οπότε αλλάζει η φορά της ανισότητας.

Δηλαδή: $(-3)\cdot 0 > (-3)συνφ > (-3)\cdot 1$ ή $0 > -3συνφ > -3$

Επίσης ισχύει $1 > ημω > 0$, προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισώσεις

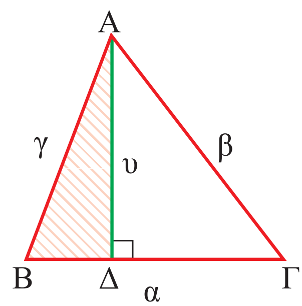
έχουμε: $0 + 1 > ημω - 3συνφ > -3 + 0$ ή $1 > ημω - 3συνφ > -3$

Προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 2 και έχουμε:

$$2 + 1 > 2 + ημω - 3συνφ > 2 + (-3) \text{ ή } 3 > Γ > -1$$

Αν στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = α, ΑΓ = β, ΑΒ = γ και υ το ύψος ΑΔ, να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι : $\mathbf{E = \frac{1}{2} α \cdot γ \cdot ημB}$

Απόδειξη



Γνωρίζουμε ότι: $E = \frac{1}{2} α \cdot υ$ (1).

Θα υπολογίσουμε το υ και θα το αντικαταστήσουμε στη σχέση (1).

Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε: $ημB = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ ή $ημB = \frac{υ}{γ}$.

Άρα $υ = γ \cdot ημB$. Έτσι $E = \frac{1}{2} α \cdot (γ \cdot ημB)$ ή $E = \frac{1}{2} α \cdot γ \cdot ημB$

Να αποδείξετε τους παρακάτω τύπους:

α. $\eta\mu\omega = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ **β.** $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1-\eta\mu^2\omega}$

γ. $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1+\varepsilon\varphi^2\omega$ **δ.** $\dfrac{1}{\eta\mu^2\omega} = 1+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega}$

Όπου ω μία οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Απόδειξη

α. Αφού ισχύει $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ τότε:

$$\eta\mu^2\omega = 1-\sigma\upsilon\nu^2\omega \;\text{ ή }\; \eta\mu\omega=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

β.

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1-\eta\mu^2\omega \;\text{ ή }\; \sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}$$

Στις ασκήσεις που μας ζητείται να αποδείξουμε ισότητα μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών, πολλές φορές την μονάδα την αντικαθιστούμε με $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega$.

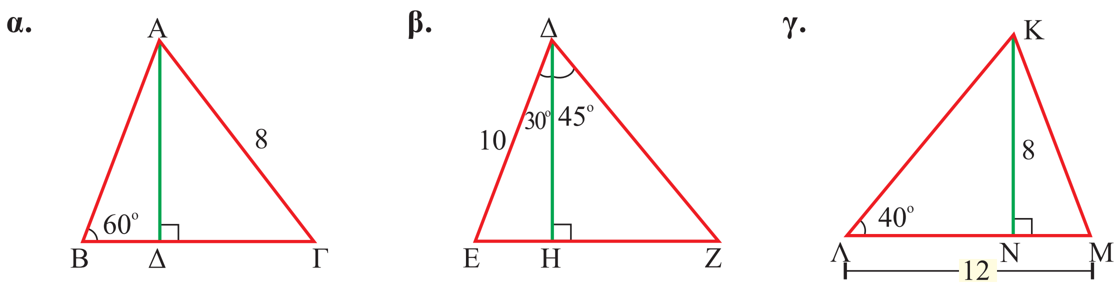
γ.

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\frac{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\left(\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)^2+1=\varepsilon\varphi^2\omega+1$$

δ.

$$\frac{1}{\eta\mu^2\omega}=\frac{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}=\frac{\eta\mu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}=1+\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\right)^2=1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Να υπολογίσετε τις πλευρές και τα εμβαδά των παρακάτω οξυγωνίων τριγώνων.



(Στη συνέχεια παραλείπουμε τις μονάδες των μηκών και των εμβαδών, θεωρώντας ότι είναι m και m² αντίστοιχα).

Λύση

α. Θα υπολογίσουμε την ΑΒ. Στο τρίγωνο ΑΒΔ:

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ=\frac{B\Delta}{AB} \;\text{ ή }\; 0,5=\frac{3}{AB} \;\text{ ή }\; 0,5\cdot AB=3 \;\text{ ή }\; AB=\frac{3}{0,5} \;\text{ ή }\; AB=6$$

Στο ίδιο τρίγωνο μπορούμε να βρούμε το ύψος ΑΔ.

$$\etaμ60^{o} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \;\; ή \;\; 0,86 = \frac{ΑΔ}{6} \;\; ή \;\; ΑΔ = 6 \cdot 0,86 \;\; ή \;\; ΑΔ = 5,16$$

Εφόσον γνωρίζουμε τα ΑΔ και ΑΓ μπορούμε στο τρίγωνο ΑΔΓ να βρούμε με Πυθαγόρειο την ΔΓ. Δηλαδή:

$$ΔΓ^2 = ΑΓ^2 - ΑΔ^2 \;\; ή \;\; ΔΓ^2 = 8^2 - 5,16^2 \;\; ή \;\; ΔΓ^2 = 64 - 26,6 \;\; ή \;\; ΔΓ^2 = 37,4 \;\; ή \;\; ΔΓ = 6,1$$

Άρα $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = 3 + 6,1 = 9,1$ και $Ε = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2}9,1 \cdot 5,16 = 23$.

β. Στο τρίγωνο ΔΕΗ μπορούμε να υπολογίσουμε τις ΔΗ και ΕΗ:

Για την ΕΗ: $\eta μ30^{o} = \frac{ΕΗ}{ΔΕ} \;\; ή \;\; 0,5 = \frac{ΕΗ}{10} \;\; ή \;\; ΕΗ = 10 \cdot 0,5 \;\; ή \;\; ΕΗ = 5$

$$συν30^{o} = \frac{ΔΗ}{ΔΕ} \;\; ή \;\; 0,86 = \frac{ΔΗ}{10} \;\; ή \;\; ΔΗ = 10 \cdot 0,86 \;\; ή \;\; ΔΗ = 8,6$$

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΖ έχει οξεία γωνία ίση με 45^{o}, άρα είναι ισοσκελές. Έτσι:
$ΗΖ = ΔΗ \;\; ή \;\; ΗΖ = 8,6$.
Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΔΗΖ και έχουμε:

$$ΔΖ^2 = ΔΗ^2 + ΗΖ^2 \;\; ή \;\; ΔΖ^2 = 8,6^2 + 8,6^2 \;\; ή \;\; ΔΖ^2 = 147,92 \;\; ή \;\; ΔΖ = 12,2$$

Ακόμη $ΕΖ = ΕΗ + ΗΖ = 5 + 8,6 = 13,6$ και $Ε = \frac{1}{2}ΕΖ \cdot ΔΗ = \frac{1}{2} \cdot 13,6 \cdot 8,6 = 58,5$.

γ. Θα υπολογίσουμε τις ΚΛ και ΛΝ στο τρίγωνο ΚΛΝ.

$$\eta μ40^{o} = \frac{ΚΝ}{ΚΛ} \;\; ή \;\; 0,64 = \frac{8}{ΚΛ} \;\; ή \;\; 0,64 \cdot ΚΛ = 8 \;\; ή \;\; ΚΛ = \frac{8}{0,64} \;\; ή \;\; ΚΛ = 12,5$$

Ας χρησιμοποιήσουμε την εφαπτομένη της γωνίας $Λ = 40^{o}$.

$$εφ40^{o} = \frac{ΚΝ}{ΛΝ} \;\; ή \;\; 0,84 = \frac{8}{ΛΝ} \;\; ή \;\; 0,84 \cdot ΛΝ = 8 \;\; ή \;\; ΛΝ = \frac{8}{0,84} \;\; ή \;\; ΛΝ = 9,5$$

Έτσι $ΝΜ = ΛΜ - ΛΝ = 12 - 9,5 = 2,5$.
Με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΜΝ υπολογίζουμε την ΚΜ.

Έτσι: $ΚΜ^2 = ΚΝ^2 + ΝΜ^2 \;\; ή \;\; ΚΜ^2 = 8^2 + 2,5^2 \;\; ή \;\; ΚΜ^2 = 64 + 6,25 \;\; ή$

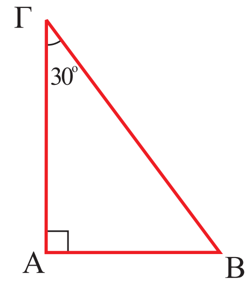
$ΚΜ^2 = 70,25 \;\; ή \;\; ΚΜ = 8,4$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ είναι:

$$Ε = \frac{1}{2}ΛΜ \cdot ΚΝ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$$

Να αποδείξετε ότι αν το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^o\right)$ έχει μια οξεία γωνία ίση με 30º, τότε η απέναντι αυτής της γωνίας κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη



Έστω ότι η γωνία Γ είναι ίση με 30º, θα αποδείξουμε ότι $AB=\frac{B\Gamma}{2}$.

Ισχύει: $\eta\mu 30^o=\frac{AB}{B\Gamma}$ ή $0,5=\frac{AB}{B\Gamma}$ ή $AB=0,5\cdot B\Gamma$ ή $AB=\frac{B\Gamma}{2}$

Αν είναι $\hat{\omega}=45^o$ και $\hat{\varphi}=60^o$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$\mathbf{A=2\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu^2\omega-2\eta\mu\omega\cdot\eta\mu\varphi}$$

$$\mathbf{B=(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega)^2-(\sigma\upsilon\nu\varphi-\eta\mu\varphi)}$$

Λύση

Αφού $\hat{\omega}=45^o$ θα είναι $\eta\mu\omega=\eta\mu 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ομοίως όταν $\hat{\varphi}=60^o$ έχουμε $\eta\mu\varphi=\eta\mu 60^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma\upsilon\nu 60^o=\frac{1}{2}$. Επομένως:

$$A=2\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu^2\omega-2\eta\mu\omega\cdot\eta\mu\varphi=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{6}}{2}$$

$$B=(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega)^2-(\sigma\upsilon\nu\varphi-\eta\mu\varphi)=$$

$$=\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0+\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2-\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2^2}=2-\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}$$

Να υπολογίσετε την οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν ισχύει:

α. $2\eta\mu\omega - 1 = 0$ **β.** $2\sigma\upsilon\nu^2\omega - \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\omega = 0$

Λύση

α. Λύνουμε την εξίσωση με άγνωστο το ημω.

$$2\eta\mu\omega - 1 = 0 \ \text{ή} \ 2\eta\mu\omega = 1 \ \text{ή} \ \eta\mu\omega = \frac{1}{2}$$

Η οξεία γωνία που έχει ημίτονο $\frac{1}{2}$ είναι η γωνία των 30^o. Άρα $\omega = 30^o$.

β. Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στην παράσταση και έχουμε:

$$2\sigma\upsilon\nu^2\omega - \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\omega = 0 \ \text{ή} \ \sigma\upsilon\nu\omega\left(2\sigma\upsilon\nu\omega - \sqrt{3}\right) = 0 \ \text{ή} \ \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \\ 2\sigma\upsilon\nu\omega - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \ \text{ή}$$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \\ 2\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{3} \end{cases} \ \text{ή} \ \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \\ \sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή η ω είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου τότε θα είναι συνω > 0, άρα η συνω = 0 απορρίπτεται.

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Αν ω, φ οξείες γωνίες, ισχύουν τα εξής:

1. Αν ημω = ημφ, τότε ω = φ

2. Αν συνω = συνφ, τότε ω = φ

3. Αν εφω = εφφ, τότε ω = φ

Αλλά η γωνία που έχει συνημίτονο ίσο με $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι η 30^o, άρα $\hat{\omega} = 30^o$.