ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 1.1 ΕΩΣ 2.2 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$; Πώς ονομάζουμε σε αυτή την περίπτωση το x_0 και την τιμή $f(x_0)$;

Β) Να αιτιολογήσετε (θεωρώντας γνωστό ότι κάθε γραμμική εξίσωση αντιστοιχεί σε μία μόνο ευθεία και αντιστρόφως) ότι για ένα οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα 2x2 **ένα μόνο** από τα παρακάτω μπορεί να συμβαίνει:

● Το σύστημα έχει μοναδική λύση

● Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων

● Το σύστημα είναι αδύνατο

Γ) Θεωρούμε τον ισχυρισμό: ≪Δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι άρτια και περιττή≫. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \varphi(x - c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά.**

ii) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $0 \in A$. Αν η f είναι περιττή, τότε θα ισχύει: $f(0) = 0$

iii) Για οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα 2x2 ισχύει: αν η ορίζουσά του ισούται με μηδέν, τότε το σύστημα θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

iv) Το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -2 \end{cases}$ είναι γραμμικό ως προς x^2 και y^2.

v) Κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα ολικό ακρότατο.

Μονάδες: 3+6+6+5x2=25

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)=1$

Β) Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η g είναι άρτια τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.

Γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$

i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει: $f(x)=\sqrt{x^4+1}-x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$ και ισχύει: $0<f(x)\le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ είναι αδύνατη.

Μονάδες: 2+5+3+5+4+6=25

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha+\beta-\frac{57}{26}}+2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha+\beta-\frac{31}{26}}+2x}$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}x+\dfrac{\beta}{3}y=1 \\ \dfrac{\alpha}{3}x-\dfrac{\beta}{2}y=-1 \end{cases}$ να έχει λύση το ζεύγος $(x,y)=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{5}\right)$. Έστω ακόμα η συνάρτηση $\varphi(x)=x^2-8\gamma x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\gamma=f\left(\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)$.

Α) Να βρείτε τους α και β.

Β) Για $\alpha=\dfrac{9}{26}$ και $\beta=\dfrac{50}{13}$:

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sigma(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ μετά από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις, από τις οποίες η μία είναι οριζόντια και η άλλη κατακόρυφη. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φ (για τη σχεδίαση και μόνο, δίνεται ότι: $\sqrt{2}\cong 1,4$)

ii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ και ότι η f είναι άρτια. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ ενώ ισχύει: $\max f(x)=\frac{1}{2}$

iii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και ότι η g είναι περιττή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

iv) Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}^*$.

Μονάδες: 5+6+5+4+5=25

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\alpha x^3-10$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}^*$ ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα και επιπλέον η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $M(\alpha,-9)$.

Γ) Για $\alpha=1$:

i) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases}\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\lambda y}=6\\ \sqrt{\dfrac{\lambda}{x}}+\sqrt{\dfrac{\lambda}{y}}=3\end{cases}$, όπου $\lambda=f\left(\sqrt[3]{3}\right)+10$

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει με την ευθεία $y=-x$ μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $x^2(3+x)>3(3-x)$ και να βρείτε τη μικρότερη ακέραια λύση της.

Μονάδες: 5+3+6+5+6=25