

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 2.1 ΕΩΣ 2.3 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

EMAIL: left-eris82@hotmail.com FACEBOOK: Lefteris Papanikolaou

ΘΕΜΑ 1ο

A) Έστω Oxy ένα καρτεσιανό επίπεδο και ε μία ευθεία αυτού.

i) Πώς ορίζεται η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ και ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει;

ii) Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας ε και σε ποια περίπτωση δεν ορίζεται;

B) Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή.

Γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: « Για οποιαδήποτε ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ και για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{\delta}$ με $\vec{\delta} = (-B, A)$ ισχύει: $\vec{\delta} \parallel \varepsilon$ ». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overline{A\Gamma}, \overline{AB} \right) \right|$.

ii) Η ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 1 = 0$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1 .

iii) Κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση της μορφής: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ο συντελεστής διεύθυνσής της.

iv) Για τις ευθείες $\varepsilon: x = 2022$ και $\eta: y = 2022$ ισχύει: $\varepsilon \perp \eta$

v) Οι εξισώσεις $-2x + 4y + 8 = 0$ και $x - 2y - 4 = 0$ παριστάνουν δύο διαφορετικές ευθείες.

Μονάδες: $3+3+5+4+5 \times 2 = 25$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2 + \alpha - 6)x + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)y + \alpha - 3 = 0$ (1) όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

A) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει:

i) Ευθεία γραμμή

ii) Ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$

iii) Ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$

iv) Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

B) Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι ευθείες που προκύπτουν από την εξίσωση (1) για

$\alpha = 1, \alpha = -3, \alpha = 3$ αντίστοιχα. Έστω επίσης A το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και B το σημείο τομής των $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ και Γ το σημείο τομής των $\varepsilon_3, \varepsilon_1$ αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A,B,Γ δεν είναι συνευθειακά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

ii) Έστω M και N τα σημεία τομής της μεσοκάθετης της πλευράς BΓ με τις ευθείες BΓ και AΓ αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας MN και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ABMN.

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής Δ του σημείου A στην ευθεία BΓ.

Μονάδες: 4+3+3+3+3+5+4=25

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $(\kappa - 1)x - (\kappa + 1)y - 2\kappa = 0$ (1) όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

A1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$.

A2) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση (1) διέρχεται από το σημείο $M(1, -1)$.

B) Να βρείτε, αν υπάρχουν, όλες τις ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) και σχηματίζουν με τους άξονες $x'x$ και $y'y$:

i) Ισοσκελές τρίγωνο

ii) Τρίγωνο εμβαδού ίσου με 2 τ.μ.

Γ) Θεωρούμε το μη σταθερό σημείο $P(1+\lambda, 1-\lambda)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι, καθώς το λ διατρέχει το \mathbb{R} , το σημείο P κινείται πάνω στην ευθεία $\varepsilon : y = -x + 2$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε δεν προκύπτει από την εξίσωση (1) για καμία τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες: 3+4+5+5+4+4=25

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε την εξίσωση $\sqrt{3}(x^2 + y^2) + 4xy + 3(x + y\sqrt{3}) = 0$ (1)

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

B) Έστω $\varepsilon_1 : x + \sqrt{3}y = 0$ και $\varepsilon_2 : \sqrt{3}x + y + 3 = 0$ οι δύο ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1).

i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $A\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διχοτομούν τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 καθώς και τους συντελεστές διεύθυνσης αυτών.

iii) Έστω ε η ευθεία που διχοτομεί την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 . Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε .

Γ) Έστω B το σημείο τομής της ευθείας $\varepsilon_2 : \sqrt{3}x + y + 3 = 0$ με τον άξονα $y'y$. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της ευθείας $\varepsilon_1 : x + \sqrt{3}y$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου με κέντρο B και ακτίνα $R = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Μονάδες: 6+2+5+6+6=25

