ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 1.1 ΕΩΣ 1.5 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

EMAIL: left-eris82@hotmail.com FACEBOOK: Lefteris Papanikolaou

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Πότε λέμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι ομόρροπα;

Β) Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα ενός καρτεσιανού επιπέδου τα οποία δεν είναι παράλληλα στον άξονα y΄y. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$

ii) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$

Γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: ≪Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ ισχύει ότι: $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$≫. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\beta}=-\vec{\alpha}$

ii) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|\geq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

iii) Για δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2<\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$

iv) Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Ισχύει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0\Leftrightarrow 0\leq\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)<\frac{\pi}{2}$

v) Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα της αρχής μείον τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος.

Μονάδες: 4+7+4+5×2=25

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Ν το μέσο της ΑΒ και Μ σημείο της ευθείας ΑΓ. Θέτουμε επίσης: $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$.

Α) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{M\Gamma} = \lambda\vec{\beta}$

ii) $\overrightarrow{\Gamma N} = \dfrac{\vec{\gamma} - 2\vec{\beta}}{2}$

Β) Να εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ για τα οποία ισχύει: $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \dfrac{\vec{\beta}}{2} + \dfrac{\vec{\gamma}}{4} \\ \vec{u} - \vec{v} = \dfrac{5}{4}\vec{\gamma} \end{cases}$

Γ) Για $\overrightarrow{AK} = \vec{u} = \frac{1}{4}\vec{\beta} + \frac{3}{4}\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\Delta K} = \vec{v} = \frac{1}{4}\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\gamma}$:

i) Να δείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right)$ και $\overrightarrow{B\Delta} = \frac{1}{4}\vec{\gamma}$

ii) Να δείξετε ότι αν $\lambda = \dfrac{3}{8}$ τότε τα σημεία Μ, Κ, Δ είναι συνευθειακά.

Δ) Να αποδείξετε ότι αν το σημείο Μ είναι η προβολή του Β στην ΑΓ τότε ισχύει:
$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{N\Gamma} = 0$

Μονάδες: 3+3+5+5+5+4=25

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές $A(-2,3)$, $\Delta(3,-4)$ και κέντρο $K(x_\kappa, y_\kappa)$ για το οποίο ισχύει: $\begin{cases} x_\kappa \cdot y_\kappa = 1 \\ x_\kappa + y_\kappa = \dfrac{5}{2} \end{cases}$, όπου $x_\kappa > y_\kappa$

Α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Στα επόμενα ερωτήματα, να θεωρήσετε ότι ισχύει $B(1,5)$ και $\Gamma(6,-2)$:

Β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το ΑΒΓΔ δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ii) Η ευθεία ΑΔ δε διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

Γ) Έστω Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Θ και να δείξετε ότι βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=2x$.

Δ) Έστω Ζ το σημείο της ευθείας $y=2x$ που ισαπέχει από τα σημεία Α και Δ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ζ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ και Θ (όπου Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ) είναι συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$.

Μονάδες: 7+4+4+5+5=25

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\kappa+3,\kappa^2+2\kappa-3\right)$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$ και $\vec{\beta}=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta},-5\right)$.

Α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε:

i) $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}\parallel x'x$

ii) $\lambda_{\vec{\alpha}}=2$

Β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\left(\frac{1}{5}\vec{\beta}\right)^2\cdot\left(1-\vec{\alpha}^2\right)\leq 1$

Γ) Για $\kappa=3$:

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=12$

ii) Να υπολογίσετε το $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

iii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Δ) Για $\kappa=3$, έστω $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $x^2-18x+72$ και $y^2-7y-60$ και στη συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2-18x+72+y^2-7y-60=0$

Μονάδες: 3+3+4+3+3+4+5=25