

Αλγεβρικές παραστάσεις

Δυνάμεις - Ρίζες

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις (Επανάληψη στις δυνάμεις)

$$(-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = -\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{8}\right)^{-1} =$$

$$A = (-1)^{-5} + (-1)^{-4} + (-1)^{-3} + (-1)^{-2} + (-1)^{-1} = \frac{35 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8 \cdot 2^{-7}}{7 \cdot 10^4 \cdot 2^{-8}} =$$

$$(-5)^7 \cdot (-5)^{10} \cdot (-5)^{-15} \cdot (-5)^5 = \left[\frac{(-1)^2}{3}\right]^2 = \left[(-4^2)^3\right]^0 =$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = \frac{(-5)^{-10}}{(-5)^{-7}} = \frac{-4^{-5} \cdot (-22)^{10} \cdot (-2)^{-1}}{8^{-5} \cdot 11^{10} \cdot 2^5} =$$

$$\frac{2^{-7} \cdot 10^5 \cdot (-7)^{-4} \cdot 6^{-8} \cdot 5^{10} \cdot 8^{-2}}{10^3 \cdot 2^{-10} \cdot (-5)^{11} \cdot (-7)^{-4} \cdot 8^{-1}} = \left[-3^2 + (-5)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^{-1}\right]^0 =$$

$$\frac{(-8)^{-6}}{(-4)^{-6}} - \frac{12^{-3}}{(-3)^{-3}} - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2 =$$

2. Να γράψετε με μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot 32 - \left(\frac{1}{64}\right)^{-1} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\right]^2 + 3^{10} \cdot 9^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-12} \cdot 81^{-1} =$$

3. Να δείξετε ότι (Επανάληψη στις ρίζες)

$$\sqrt{12} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{200} \cdot \sqrt{18} = 60$$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{36}}}}$$

$$B = \sqrt{7 + 3\sqrt{1 + 8\sqrt{1}}}$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{22}{11}} \cdot \sqrt{\frac{30}{15}} + \sqrt{\frac{20}{4}} \cdot \sqrt{\frac{10}{2}}$$

$$\Delta = 5\sqrt{\sqrt{16}} - \sqrt{20} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{64}$$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχουν νόημα οι παραστάσεις

$$A = \sqrt{x-3}$$

$$B = \sqrt{4-2x}$$

$$\Gamma = \sqrt{2-3x} + \sqrt{x+1}$$

6. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

				Άθροισμα		Γινόμενο	
α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$
4	49						
25	324						
169	196						

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5})\sqrt{5} \quad B = 2\sqrt{8} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{18} \quad \Gamma = \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{32}$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{28} - \sqrt{63}}{\sqrt{700}} \quad E = (\sqrt{75} + \sqrt{125})\sqrt{20}$$

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς**1. Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι σωστή, μπορεί όμως να είναι λάθος.**

Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το **Σ** αν αυτή είναι σωστή και το **Λ** αν αυτή είναι λάθος.

- Ο αριθμός $-x$ είναι ένας αρνητικός ρητός αριθμός.
- Ο αριθμός $-x$ είναι ο αντίθετος του αριθμού x και μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αν ο x είναι αρνητικός ή θετικός αντίστοιχα.
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν αντίθετες απόλυτες τιμές.
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια πάντα απόλυτη τιμή αφού αυτή εκφράζει την απόσταση των σημείων του άξονα στα οποία αυτοί μπαίνουν από την αρχή του.
- Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός.
- Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός.
- Ο αντίθετος του x είναι ίσος με το γινόμενο του -1 με τον x δηλαδή $-x = (-1) \cdot x$
- Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο αριθμό ομόσημο μ' αυτούς.
- Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο έναν θετικό αριθμό.
- Οι ετερόσημοι έχουν γινόμενο έναν αρνητικό αριθμό.
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν γινόμενο αρνητικό αριθμό.
- Αν a ένας ρητός αριθμός τότε $a \cdot 1 = a$ και $a \cdot 0 = 0$.
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 0
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο -1
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 1

2. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε το σωστό συμπέρασμα συμπληρώνοντας τον πίνακα που ακολουθεί.**1. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι αρνητικός αριθμός**

A. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. B. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.

2. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι αριθμός θετικός.

A. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. B. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.

3. Έστω οι ρητοί αριθμοί α, β, γ ώστε $\alpha\beta\gamma = 1$

A. Οι αριθμοί α, β, γ είναι αντίστροφοι. B. Οι αριθμοί α, β, γ είναι ομόσημοι. Γ. Ο αριθμός α είναι αντίστροφος του β . Δ. Ο αριθμός α είναι αντίστροφος του $\beta\gamma$.

4. Έστω οι ρητοί αριθμοί α, β ώστε $-3 \cdot (\alpha + \beta) = 0$.

A. Οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι. B. Οι αριθμοί α, β είναι 0. Γ. Ο αριθμός α είναι αντίθετος του β . Δ. Ισχύει $\alpha + \beta = 3$.

5. Το γινόμενο και το άθροισμα δύο αριθμών είναι αριθμός θετικός.

A. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. B. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.

3. Να γίνουν οι πράξεις

$$\text{α) } \frac{\frac{2}{-5} + \frac{-4}{3} - \frac{-2}{5}}{-1 - \frac{1}{3}}$$

$$\text{β) } \left(-\frac{1}{-3} + \frac{-7}{3} - 2 \right) : \left(\frac{-2}{4004} \right)$$

$$\text{γ) } -\frac{-2 - (-2) \cdot (-5)}{-6 : \frac{2}{3}} + \frac{(-10) : (-2) - (-3) \cdot 2 + 1}{-8 \cdot 2} : \frac{-4}{3}$$

1.2 Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

1. Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι σωστή, μπορεί όμως να είναι λάθος. Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το Σ αν αυτή είναι σωστή και το Λ αν αυτή είναι λάθος.

- Η αλγεβρική παράσταση $\frac{2}{x}$ είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή 2.
- Η αλγεβρική παράσταση $\frac{x}{2}$ είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή $\frac{1}{2}$
- Το μονώνυμο $x^3\psi$ δεν έχει συντελεστή.
- Τα άθροισμα των μονωνύμων $2x^3\psi$ και $x^3\psi$ είναι το μονώνυμο $3x^3\psi$
- Ο αριθμός 2004 μπορεί να χαρακτηριστεί μονώνυμο.
- Η παράσταση $(\sqrt{2} + \sqrt{3})x$ δεν είναι μονώνυμο.
- Το κύριο μέρος του μονωνύμου $-4a^3b^2$ είναι το a^3
- Η παράσταση $2x + 7x - x$ δεν είναι μονώνυμο.
- Το γινόμενο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
- Το ηλίκο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
- Το άθροισμα δύο μονωνύμων με το ίδιο κύριο μέρος είναι πάντα μονώνυμο.
- Το άθροισμα δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
- Η δύναμη ενός μονωνύμου με εκθέτη θετικό ακέραιο είναι ένα μονώνυμο.

2. Να κάνετε τις πράξεις, (άθροισμα ομοίων μονωνύμων):

- $5x + 3x - 2x - x$
- $-x^2 + x^2$
- $2ax^3 - 0,5ax^3 + 1,25ax^3$
- $-x^3\psi + \frac{1}{3}x^3\psi + \frac{8}{12}x^3\psi$
- $-\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{3} + 2a^3$
- $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}x}{4} + x$

3. Να κάνετε τις πράξεις, (γινόμενο μονωνύμων):

- $-5x \cdot 3x$
- $0,5x^3\psi \cdot (-2x\psi^3) \cdot x$
- $-2\omega\phi \cdot \frac{1}{2}\omega \cdot (-3\phi) \cdot \frac{1}{3}\omega$
- $(-5x^3a^4)^2$
- $\left(-\frac{2}{3}x\right)^3 \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{2}x\right)^2 \cdot 1,5x$

4. Να κάνετε τις πράξεις, (διαίρεση μονωνύμων):

- $-5x : 4x$
- $4ax^3 : (-2ax)$
- $-5\psi : (3\psi^3x)$
- $\frac{xt^3}{3} : \frac{x^3t}{6}$
- $\beta : (-\beta^2)$
- $\left(-\frac{2xc}{3}\right) : \left(-\frac{4}{9}x\right)$

5. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Δύο μονώνυμα είναι όμοια όταν είναι ίδιου βαθμού.
2. Ο βαθμός του μονωνύμου $2007x^4\psi^3\omega$ είναι ίσος με 7.
3. Το μονώνυμο $(a-4)x^5$ είναι $5^{\text{ου}}$ βαθμού για κάθε τιμή του a .
4. Η παράσταση $x^4\psi^2 + x^4\psi^2$ είναι μονώνυμο.
5. Η παράσταση $3x^{-2}\psi^3$ είναι μονώνυμο.
6. Οι παραστάσεις $4x^{-2}\psi$, $6x^{-2}\psi^3$ είναι όμοια μονώνυμα.
7. Η αλγεβρική παράσταση $4a^{\lambda+3}\beta^2$ είναι μονώνυμο για κάθε τιμή του ακεραίου λ .
8. Τα αντίθετα μονώνυμα είναι ίδιου βαθμού.

1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

1. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $A = -5x\psi + x^2 - 2\psi^2$

- α) Από ποια μονώνυμα αποτελείται η παράσταση;
- β) Είναι σωστό ή λάθος ότι αυτή η παράσταση είναι ένα πολυώνυμο;
- γ) Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της παράστασης για $x = -1$ και $\psi = 2$

2. Να κάνετε τις πράξεις (: Αναγωγή ομοίων όρων)

- $3a - 5\beta + 2a - \beta$
- $x\sqrt{2} + x - 2 + 3x - 1$
- $\frac{1}{5}x^2\psi - x\psi + x\psi^2 - \frac{2}{3}x^2\psi - \frac{1}{2}x\psi^2 + x\psi + 1$
- $-\frac{\kappa}{2} - \frac{\lambda}{3} + 2\kappa - \lambda + \frac{\kappa}{3}$
- $x^2 - x\psi - \psi x + \psi^2 - x^2$
- $2 - 3x + x^2 + 5x - 3 + 7x^2$
- $a^3 - a^2\beta + a\beta^2 - 2a^2\beta + 2a\beta^2 - \beta^3$
- $-(2a - \beta) + (3a - 4\beta) - a - (1 - 3\beta) + 2$
- $1 + x + x^2 - (1 - x + x^2) - 2x$

3. Ένας οπωροπώλης είχε x κιλά μήλα και ψ κιλά πορτοκάλια.

Πούλησε την α' ημέρα την μισή ποσότητα των μήλων και το $\frac{1}{3}$ της ποσότητας των πορτοκαλιών. Πούλησε την β' ημέρα τα $\frac{3}{4}$ της ποσότητας των μήλων και τα $\frac{3}{4}$ της ποσότητας των πορτοκαλιών που του έμειναν από την α' ημέρα.

- Να υπολογίσετε την συνολική ποσότητα των μήλων και των πορτοκαλιών που έμειναν στο τέλος της β' ημέρας αν η αρχική ποσότητα των μήλων είναι 16 κιλά και η αρχική ποσότητα των πορτοκαλιών είναι 24 κιλά.

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α) $(3x^2-2x)(4x^3+4x)$,
- β) $(x^4-2x+2)(x^5-2x)$,
- γ) $(x-3)(x-2)x$
- δ) $(a^2-3\cdot a+1)\cdot(a-2)+(a^3-2\cdot a)(a^2-a)$

2. Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός a , ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = 9x^3 - 3x + 8x - 27 \text{ να παίρνει τη μορφή } Q(x) = a(x^3+x) - 3x^2 + (x-3)(x^2+3x+9).$$

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3ax^3 + 2x^2 - x + 6x^3 - 2x + 8$

- α) Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων

- β) Να γραφεί κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρεθεί ο βαθμός του.
 γ) Για $a = 0$ να βρείτε την αριθμητική τιμή του για $x = -2$.

4. Για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος την εβδομάδα, μία εταιρία έχει κόστος $K(x) = 500x + 50000$ ευρώ. Τις x μονάδες την εβδομάδα τις διαθέτει η εταιρεία στην τιμή $T(x) = 2000 - 2x$ ευρώ ανά μονάδα.

- α) Να βρείτε το πολυώνυμο που δίνει το κέρδος από την πώληση x μονάδων από το προϊόν την εβδομάδα
 β) Να βρείτε το κόστος όταν δεν παράγει προϊόν και να το δικαιολογήσετε.
 γ) Να βρείτε το κέρδος αν πουλήσει 100 μονάδες την εβδομάδα.

5. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο αν αφαιρεθεί από το $5x - 2x + 1$ θα προκύψει το πολυώνυμο $4x - 3x + 5$.

6. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν $P(x) = 2x^2(x^4 - 1)$ τότε $P(-x) = P(x)$.
2. Το πολυώνυμο $P(x) = -2$ είναι μηδενικού βαθμού.
3. Το πολυώνυμο $P(x) = 0$ είναι μηδενικού βαθμού.
4. Το πολυώνυμο $P(x)$ και $P(2x)$ είναι ίδιου βαθμού.
5. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού τότε το πολυώνυμο $P^2(x)$ είναι 6^{ου} βαθμού.
6. Το πολυώνυμο $P(x) = 0 \cdot x^3 - 2x + 5$ είναι 3^{ου} βαθμού.
7. Ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x) = (3x^2 - x)8(x^2 - 1) + x^{10} - 3$ είναι 18.
8. Αν δύο πολυώνυμα δεν έχουν βαθμό τότε είναι ίσα.
9. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού και το $Q(x)$ είναι 2^{ου} βαθμού τότε το πολυώνυμο $P(x)Q(x)$ είναι 6^{ου} βαθμού.

1.5 Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) η λάθος (Λ)

1. Ισχύει: $(x^3 + 2)^2 = x^6 + 4$.
2. Ισχύει: $(a - \beta)^2 = (\beta - a)^2$.
3. Δεν ισχύει ποτέ η ισότητα $(a + \beta)^2 = a^2 + \beta^2$
4. Ισχύει: $a^2 + \beta^2 = (a + \beta)^2 - 2a\beta$.
5. Αν $x + \frac{1}{x} = 4$ τότε $x^2 + \frac{1}{x^2} = 16$
6. Ισχύει $(a - \beta)^2 = a^2 - \beta^2$.
7. Αν ισχύει $a^2 + \beta^2 = 0$ τότε $a = 0$ ή $\beta = 0$.
8. Αν $a^2 + \beta^2 = 2a\beta$ τότε $a = \beta$.
9. Ισχύει ότι $(3a\beta - \beta)^2 = \beta(3a - 1)^2$.
10. Αν $a^2 + \beta^2 - (a + \beta)^2 = 0$ τότε $a = 0$ ή $\beta = 0$
11. Ισχύει $-(a + \beta)(a - \beta) = \beta^2 - a^2$.
12. Ισχύει $a^3 + \beta^3 = (a + \beta)(a^2 + a\beta + \beta^2)$.
13. Ισχύει πάντα $(a - \beta)^3 = -(\beta - a)^3$.
14. Ισχύει $(x - \psi)^2 = x^2 - 2x(-\psi) + (-\psi)^2$

2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

- $(\dots - \dots)\dots = x^2 - \dots + \psi^2$
- $(\dots - \dots)\dots = x^3 - \dots + \dots - \psi^3$
- $(\dots + \dots)\dots = x^2 + \dots + \psi^2$
- $(\dots + \dots)\dots = x^3 + \dots + \dots + \psi^3$
- $(x - \psi)(\dots + \dots) = \dots - \dots$
- $x^3 - \psi^3 = (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots)$
- $x^3 + \psi^3 = (\dots + \dots)(\dots - \dots + \dots)$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα

$(x + 3)^2$

$(2x + 5)^2$

$(2x + 5\psi)^2$

$(x^2 + 1)^2$

$\left(\frac{x^5}{5} + \frac{\psi^3}{3}\right)^2$

$(x - 4)^2$

$(1 - 3x)^2$

$(3\kappa - 2\lambda)^2$

$(x^3 - 2)^2$

$\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\psi\right)^2$

4. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

$\bullet (2x + 3x^2)^2$

$\bullet \left(\frac{2}{3}x^2 - 4x\right)^2$

$\bullet (-3x^3 + 2x)^2$

$\bullet (4x^2y + 2xy^2)^2$

$\bullet (-3x - 2x^3y)^2$

$\bullet \left(\frac{1}{a} + a\right)^2$

5. Να βρεθούν τα αναπτύγματα

$(a + 1)^3$

$(2a + 3)^3$

$(a + 5\beta)^3$

$(x^2 - 1)^3$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

$(x + 2)^3$

$(1 + 3a)^3$

$(3\kappa - 2\lambda)^3$

$(x^3 - 2)^3$

$\left(-x - \frac{1}{x}\right)^3$

6. Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \quad \text{και} \quad B = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A , B

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A \cdot B$ είναι ίση με 1**7. Να αποδείξετε ότι**

$(a + \beta)^2 - 4a\beta = (a - \beta)^2$

$(a - \beta)^2 + 4a\beta = (a + \beta)^2$

$a^3 + \beta^3 = (a + \beta)^3 - 3a\beta(a + \beta)$

$a^3 - \beta^3 = (a - \beta)^3 + 3a\beta(a - \beta)$

$2a^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2a\beta - 2\beta\gamma - 2a\gamma = (a - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - a)^2$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2x + 3)^2 - (3x - 1)(3x + 1)$,

β) $(3a - 2\beta)^2 - (3a + 2\beta)^2 + 3a(\beta - 1) + 3a$

γ) $(1 - x)(1 + x) + (x - 1)^2 + 2(x - 1)$

δ) $(x - 2)^2 - (1 - 2x)^2 + (3x - 1)(3x + 1)$

9. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανεξάρτητα του x.

$P(x) = (x^3 - 1)^2 + (x^3 + 1)^2 - 2(x^3 - 1)(x^3 + 1)$.

$Q(x) = (x^2 + 1)^3 + 3(x^2 + 1)^2(1 - x^2) + 3(x^2 + 1)(1 - x^2)^2 + (1 - x^2)^3$.

10. Αν $a + \beta = 3$ και $a\beta = -4$ να υπολογίσετε:

α) $a^2 + \beta^2$

β) $a^3 + \beta^3$

11. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

- α) $(4x - \psi) \cdot (4x + \psi)$,
 β) $(3x^2 - \psi)(3x^2 + \psi)$,
 γ) $(x - \psi + 2\zeta)(x + \psi - 2\zeta)$
 δ) $(4x - x^3)(4x + x^3)$
 ε) $(x - \psi)(-x - \psi)(x^2 + \psi^2)$.

12. Αν $x + \frac{1}{x} = 2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$x^2 + \frac{1}{x^2}$$

13. Αν $\alpha = \sqrt{3} - 1$, $\beta = \sqrt{3} + 1$ τότε να υπολογίσετε:

- α) $\alpha\beta$,
 β) $\alpha^2 + \beta^2$,
 γ) $\alpha^2 - \beta^2$

14. Να αποδείξετε ότι

α) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$.

β) Αν για τους αριθμούς α , β γνωρίζουμε ότι: $\alpha + \beta = \sqrt{5}$ και $\alpha - \beta = \sqrt{3}$ να δείξετε ότι

$\alpha\beta = \frac{1}{2}$ και να υπολογίσετε το άθροισμα τετραγώνων των α , β .

15. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α= 90°. Αν $\beta + \gamma = \sqrt{20}$ και $\alpha = 4$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.**16. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων είναι περιττός αριθμός.****1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων****1. Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:**

- | | | |
|---|--------------------------|---|
| α) $3x^2 + 6x$ | β) $4x^3 - 4x^2$ | γ) $3x^2 - 3$ |
| δ) $5x^3 - 10x^2 - 5x$ | ε) $4x^2\psi - 12x\psi$ | στ) $3(x - \psi) - \alpha(\psi - x) - x + \psi$ |
| ζ) $\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$ | η) $6\alpha x + 3\alpha$ | θ) $2\alpha^5 - 10\alpha$ |
| ι) $24\kappa^2\lambda - 16\kappa\lambda^2$ | κ) $15\mu^2 + 20\mu$ | λ) $220\omega^2 + 33\omega^3$ |

2. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις:

- | | |
|---|---|
| $x(x + 3) + 2(x + 3)$ | $x^3(x + 1) - x(x + 1)$ |
| $\alpha(x + \psi) + \beta(x + \psi)$ | $x(\alpha - \beta) + \psi(\beta - \alpha)$ |
| $(x - 1)(x - 2) - (1 - x)(2x + 1)$ | $(2\psi + 2)(\psi - 6) - (3\psi + 3)(2 - \psi)$ |
| $(\alpha - \beta)^3 + (\alpha - \beta)$ | $x(x - \alpha)^2(x + 2\alpha) - x^2(x - \alpha)(x + 2\alpha)^2$ |
| $\alpha^2(\alpha - \beta)\beta^3 + \alpha(\alpha - \beta)^2\beta$ | $(x + \psi + 1) + (x + \psi + 1)x + (x + \psi + 1)\psi$ |

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- | | |
|--------------------------|---------------------------------------|
| $\alpha^2\beta^2 - 4$ | $16x^4 - 81\psi^2$ |
| $1 - 8x^3$ | $64 + 125\alpha^3$ |
| $36\omega^2 - 10^4$ | $27\alpha^3 - 1000$ |
| $216x^6 + \psi^3$ | $(\alpha + \beta)^2 - 1$ |
| $49x^2\psi^4 - 64$ | $\frac{\chi^2}{4} - \frac{\psi^2}{9}$ |
| $0,001x^3 - 0,064\psi^3$ | $\frac{\alpha^3\beta^9}{27} + 1$ |

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| $\alpha(x - \psi) + x^2 - \psi^2$ | $(\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 - \beta^2$ |
| $x^4 - x^2 + x + 1$ | $\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^3 - \beta^3$ |
| $x^5 - 8x^2 + x^4 - 16$ | $x^3 + x^2 + 5x + 125$ |
| $4x^4 + 8x^6 + \psi^3 - \psi^2$ | $\kappa^3 - 2\kappa^2 + - 27\lambda^3 + 18\lambda^2$ |

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = x^3 - 7x + 6, \quad B = 2x^3 - 5x + 3, \quad \Gamma = x^3 - 4x + 3, \quad \Delta = x^3 + 2x^2 - 1$$

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 4 \quad \beta) a^2 + \beta - \beta^2 - a + (a - \beta)^2 \quad \gamma) (x-1)^2 - 6(x-1) + 9$$

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = a^2 - 4a\beta + 4\beta^2 - 16, \quad B = 4a^2 - 4 - 4a\beta + \beta^2 \\ \Gamma = x^2 - 4x\psi - 5\psi^2, \quad \Delta = 3a^2 - 4a + 1 - 2a\beta - \beta^2$$

8. Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:

$$\alpha) x^3 - 4x^2 + 3x, \quad \beta) x^3 - 6x^2 + 8x, \quad \gamma) 2x^3 - 10x^2 + 12x, \quad \delta) \frac{x\psi}{10} + \frac{x^2}{25} + \frac{\psi^2}{16}$$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 2x + 1 & 4a^2 - 4a + 1 \\ 25\kappa^2 + 20\kappa + 4 & x^2 - x + \frac{1}{4} \\ 18 + 12x + 2x^2 & 5x^4 - 100x^2 + 500 \\ (a + \beta)^2 + 2(a\beta + \beta^2) + \beta^2 & (x + \psi + 1)^2 - 2(x + \psi + 1) + 1 \\ \frac{1}{4}x^{10} + x^5 + 1 & a^3 - 4a^2 + 4a \end{array}$$

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} a\beta - 3a + 2\beta^2 - 6\beta & x^2 - (a - \beta)x - a\beta \\ 3(a - \beta) - (a^2 - \beta^2) & (x - 1)(x - 2) - (1 - x)(2x + 1) \\ (5x + 3\psi)^2 - (3x + 5\psi)^2 & (2\psi + 2)(\psi - 6) - (3\psi + 3)(2 - \psi) \\ x^2y^2 + xy - y^3 - x^2y & x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) \\ (x + y)^2 - w^2 + x + y + w & x^3 + x^2 - 2 \\ 6x^2 + 5xy + y^2 & 21 + 4a - a^2 \end{array} \quad \text{Υπόδειξη: } 4a = 7a - 3a$$

11. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Ισχύει $x^2 - 2 = (x-2)(x+2)$.
2. Ισχύει $a^2 + \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$.
3. Ισχύει $a^2 - \beta^2 = -(\beta - a)(a + \beta)$.
4. Ισχύει $\psi(a + \beta) - a - \beta = (a + \beta)(\psi + 1)$.
5. Ισχύει $a(\kappa - \lambda) + \beta(\lambda - \kappa) = (a - \beta)(\kappa - \lambda)$.
6. Ισχύει $1 - x^2 = (x - 1)(x + 1)$.

1.7 Διάρθρωση πολυωνύμων

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαιρέσης σε κάθε περίπτωση.

$$\alpha) (x^3 - 5x^2 + 7x - 2) : (x - 2), \\ \beta) (5x^2 + 16x + 3) : (x + 2), \\ \gamma) [(x^2 - 1)(x+1) - 5] : (x-3), \\ \delta) (2x^4 + 4x^3 - 5x + 2) : (x^2 - 1)$$

2. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x^3 - 4x) \cdot (3x^2 - 3) - 4x + 5$.

I) Να βρείτε το ηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων

$$\alpha) P(x) : (x^3 - 4x) \quad \beta) P(x) : (3x^2 - 3)$$

II) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 5 - 4x$.

3. I) Να κάνετε τη διαίρεση $(2x^3 - 7x^2 + 11x - 4) : (x^2 - 3x + 4)$.

II) Να παραγοντοποιήσετε : $2x^3 - 7x^2 + 11x - 4$.

4. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $3x^3 - 2x - 1$ είναι $3x - 1$ να υπολογίσετε το $P(1)$.

5. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή (Λ)

1. Αν ο διαιρετέος είναι 3^{ου} βαθμού και ο διαιρέτης 2^{ου} τότε το υπόλοιπο θα είναι σίγουρα 1^{ου} βαθμού.
2. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 9$ τότε: $P(-3) = P(3) = 0$.
3. Αν το $x + 3$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$ τότε $P(-3) \neq 0$.
4. Το υπόλοιπο μιας διαίρεσης έχει πάντα βαθμό.
5. Σε μία Ευκλείδεια διαίρεση ο βαθμός του πηλίκου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του διαιρέτη.

1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

- I) $2x^2\psi^3\omega^2$, $4x^3\psi^2\omega$, $6x\psi^2\omega^3$
 II) $6(x\psi)^2x\psi$, $(2x)^2x\psi^3$, $8x\psi^3$
 III) $4a^2\beta\gamma$, $8a^4\beta$, $12\beta\gamma^3$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

- I) $x^2 - 3x + 2$, $x^2 - 4x + 3$, $x^2 - 5x + 6$
 II) $x^2 - 4x + 4$, $x^2 + x - 6$, $x^2 - 4$
 III) $(x-1)(x-1)$, $(x+1)(x-1)^2$, $(x+1)^2(x-1)$

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις – 1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

1. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις

$\frac{a}{a^2}$	$\frac{ax^3}{xa^3}$	$\frac{6(\psi+1)}{2(\psi+1)^2}$
$\frac{a\beta^2\gamma^3}{a^2\beta\gamma^2}$	$\frac{8(x+1)(x-2)^2}{24(x-2)(x+1)^2}$	$\frac{14a}{7(a+1)}$
$\frac{6x}{3x^2 - x}$	$\frac{x^2 + 3x\omega}{x^2 - 9\psi^2}$	$\frac{x^2 - 6x + 9}{2x^3 - 6x^2}$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους)

$\frac{2x + 3\psi x + 6\psi + 4}{3\psi x + 3\psi + 2x + 2}$	$\frac{a\beta + a - 4\beta - 4}{a\beta - 4\beta - a + 4}$
$\frac{x\psi + x\beta - a\psi - a\beta}{x^2 - 2ax + a^2}$	$\frac{x^3 + x - x^2 - 1}{x^4 - 1}$

3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις

$$A = \frac{x^2 - 6x + 8x}{x^2 - 4x + 3} \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$$

$$B = \frac{x^2\psi^2 - \psi^4}{x^3 + \psi^3} : \frac{x\psi^2 - \psi^3}{x^2 - x\psi + \psi^2}$$

4. Να απλοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις

$\frac{(a-\beta)^2}{a^2 - \beta^2} \cdot \frac{(a+\beta)}{a - \beta}$	$\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2 - x}{x^3}$	$\frac{2a - \beta}{a - \beta} \cdot \frac{a}{\beta - 2a} \cdot \frac{(\beta - a)^2}{a^3}$
---	---	---

5. Να γραφεί ο αριθμός $A = 2007^2 + 4015$ ως τέλειο τετράγωνο.

6. Αν για τους αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$, χωρίς κάποιος από αυτούς να είναι 0 να δείξετε:

α) Η παράσταση $\frac{\beta^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{\alpha + \beta}$ είναι ίση με γ .

β) Η παράσταση $\frac{\beta^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta - \gamma^2}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma^2 + 2\gamma\alpha - \beta^2}{\gamma + \beta}$ είναι ίση με 0.

7. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές α, β και υποτεινούσα 10.

Κατασκευάζουμε στο εξωτερικό του τριγώνου τρία τετράγωνα με πλευρές τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Αν το συνολικό εμβαδόν είναι 224cm^2 , να βρείτε:

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου.

β) Τις πλευρές α, β του τριγώνου

8. Η υποτεινούσα ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με 10 cm και είναι 14 cm μικρότερη από την περίμετρο του τριγώνου. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου.

9. Να κάνετε τις πράξεις

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{2}{x-2} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x+2}$$

10. Να αλλάξετε κάποια πρόσημα στους παράγοντες των γινομένων

$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$, $(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)$, $(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)$ ώστε να προκύψει το Ε.Κ.Π. τους. Ποιο είναι αυτό;

α) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$\frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} + \frac{\beta + \gamma}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{\gamma + \alpha}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)}$$
 είναι πάντα ίση με το 0.

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} + \frac{\beta\gamma}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{\gamma\alpha}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)}$$
 είναι πάντα ίση με το 1.

11. Να κάνετε τις πράξεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τους παρονομαστές)

$$\frac{1}{x^2 + x\psi} + \frac{1}{x\psi + \psi^2} - \frac{1}{x\psi}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \alpha\beta} - \frac{2\beta}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} + \frac{2\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2}$$

$$\frac{\psi}{x^2 - x\psi} - \frac{1}{x + \psi} - \frac{2\psi}{x^2 - \psi^2}$$

12. Αν $A = x(x - 4)$ και $B = (x - 6)(x + 2)$ να δείξετε ότι:

α) $B = A - 12$

β) Ο αριθμός $A \cdot B + 36$ είναι τέλειο τετράγωνο.

γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x - 6)(x - 4)(x + 2) + 36$

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x - 1$.

α) Να λυθεί η εξίσωση $P(0) + P(-1) + P(1) + P(-x) = x$

β) Να υπολογισθεί ο λ , αν είναι γνωστό ότι είναι:

$$\gamma) \lambda \cdot P\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot P\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 3 - \frac{\lambda}{2}$$