

2.1 Η εξίσωση $ax+b = 0$

1. Δίνεται η εξίσωση: $4(3x - 2) - 4x = 3(x - 1) + 5$

Να εξετάσετε αν το $x = 2$ είναι ρίζα της. Εξετάστε αν ο αριθμός $x = 3^{2007}$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

2. Να λυθούν στο σύνολο \mathbb{Q} οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $3 - 2(x - 3) - x - 1 = 3(x - 6) + 2$

β. $\frac{3x - 2}{4} - \frac{x - 1}{2} = \frac{4x - 1}{3}$

3. Να λύσετε στο σύνολο \mathbb{R} τις εξισώσεις:

α. $2x = 5x,$

β. $2(x - 1) = 2x - 2,$

γ. $0x = 1,$

δ. $\frac{3x - 1}{2} + \frac{4x + 2}{3} = 3x$

ε. $4x - \frac{-3x + 2}{5} = \frac{x - 1}{2}$

4. Να λύσετε στο σύνολο \mathbb{R} τις εξισώσεις και να γίνει η επαλήθευση:

α. $\frac{x - 1}{3} = 2 - 3(x - 3) + \frac{x}{2}$

β. $\frac{7x + 4}{5} = x + \frac{3x - 5}{2}$

γ. $\frac{8 - x}{6} + \frac{3x - 5}{3} = \frac{x + 6}{2} - \frac{x}{3}$

5. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των εξισώσεων:

$(3x - 2)^{2007} + 5(x^3 - 1) = 1$ και $2(x - 1) - 3 = -2 - (2x - 1)$

6. Ένας πατέρας είναι σήμερα 47 ετών και έχει δύο παιδιά ηλικίας 10 και 5 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι ίση με το άθροισμα των ηλικιών των δύο παιδιών;

7. Ένα τεστ περιλαμβάνει 40 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση στην οποία δίνεται σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες, ενώ κάθε ερώτηση που δεν απαντιέται ή δίνεται σ' αυτήν λάθος απάντηση βαθμολογείται αρνητικά με 2 μονάδες. Ο Νίκος πήρε 165 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

8. Να βρεθεί ο αριθμός που πρέπει να αφαιρέσουμε από τους αριθμητές των κλασμάτων $\frac{17}{3}$ και $\frac{19}{4}$, ώστε αυτά να γίνουν ίσα.

9. Για ένα εμπόρευμα με συντελεστή ΦΠΑ 19% πληρώσαμε συνολικά 1428 ευρώ. Ποια είναι η τιμή του εμπορεύματος χωρίς ΦΠΑ;

10. Από τους μαθητές μιας τάξης το $\frac{1}{3}$ πηγαίνει σχολείο με τα πόδια, το $\frac{1}{4}$ χρησιμοποιεί ποδήλατο, το $\frac{1}{6}$ πηγαίνει με το λεωφορείο και 9 μαθητές πηγαίνουν στο σχολείο με το αυτοκίνητο των γονιών τους. Πόσους μαθητές έχει η τάξη αυτή;

2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $6x(x + 7) = 0$

ii. $(x - 3)(x - 7) = 0$

iii. $(x + 1)^2 = 0$

iv. $(x - 2)(x - 5)(1 - x) = 0$

v. $x^2 - 4x = 0$

vi. $2x^2 + 14x = 0$

vii. $x^2 = -5x$

viii. $(x + 1)^2 - 4(x + 1) = 0$

ix. $4 - 4x^2 = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x^2 + 2x - 3 = 0$

ii. $x^2 - 3x - 4 = 0$

iii. $3x^2 - 2x - 1 = 0$

iv. $4x^2 - 17x + 15 = 0$

v. $x^2 + 2x = 5$

vi. $x^2 - 8 = -6x$

3. Απαντήστε με σωστό (Σ) η λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις

1. Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες όταν $\Delta > 0$.
2. Η εξίσωση $3x - x^2 + 1 = 0$ έχει $\Delta = -11$.
3. Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ έχει πάντα δύο λύσεις άνισες, αν a και c είναι ετερόσημοι.
4. Η εξίσωση $x^2 - ax = 0$ δεν είναι αδύνατη.
5. Μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta < 0$.
6. Αν $\beta = 0$ και $\gamma > 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ δεν έχει λύση.
7. Η εξίσωση $x^2 - 4x = 0$ έχει μία λύση την $x = 4$.
8. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με ένα θετικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει τις ίδιες ρίζες.
9. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με έναν αρνητικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει αντίθετες ρίζες.
10. Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ έχει ρίζα το 1 τότε $a + b + c = 0$.
11. Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ έχει ρίζα το 0 τότε $c = 0$.
12. Κάθε εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει το πολύ δύο ρίζες.

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

- α. $3x^2 - 27 = 0$ β. $4x^2 - 16 = 0$ γ. $x^2 - 5 = 0$ δ. $x^2 - 9 = 0$ ε. $x^2 - 1 = 0$
στ. $x^2 + 6 = 0$ ζ. $x^2 + 8 = 0$ η. $3x^2 + 48 = 0$

5. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 2x + 4\lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση

- α. Να έχει δύο ρίζες άνισες πραγματικές
- β. Να έχει δύο ρίζες ίσες
- γ. Να μην έχει πραγματικές ρίζες.

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- α. $(x-1)(x^2-7x+12) = 0$ β. $(x^2-4)(x^2-5x+6) = 0$ γ. $x^3+x^2-x-1 = 0$
δ. $x^3-2x^2-x+2 = 0$ ε. $x^3-4x^2 = x^2-4$ στ. $x^4-5x^2+6 = 0$

7. Να γραφούν με τη μορφή γινομένου τα τριώνυμα:

- i. $x^2+15x+50$ ii. $-6x^2+7x+20$ iii. $5x^2-2x-3$
iv. $6x^2+x-2$ v. x^3+6x^2-91x

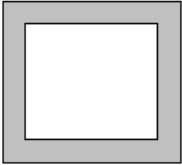
8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$A = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}, \quad B = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2x^2 - x - 1}, \quad \Gamma = \frac{3x^2 + 19x - 14}{6x^2 - x - 2}$$

9. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 0$ να έχει ρίζα το 2. Μετά να αποδειχθεί ότι η ρίζα είναι διπλή.

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

1. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι 88 cm².
2. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα $\Sigma = 16$ και γινόμενο $\Gamma = 63$.
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη κάθετων πλευρών $3x+2$, $4x-3$ και υποτεινούσα $5x-1$ να βρεθεί το x και μετά τα μήκη των πλευρών του.
4. Σε ένα τρίγωνο η βάση του είναι κατά 5 cm μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος. Αν το τρίγωνο έχει εμβαδό 12 cm², να υπολογίσετε τη βάση αυτή και το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.
5. Μία επιχείρηση αποφάσισε να μοιράσει 4000 ευρώ σε 90 εργαζόμενους. Αν κάθε άνδρας πήρε τόσα ευρώ όσες ήταν οι γυναίκες και κάθε γυναίκα πήρε τόσα ευρώ όσοι ήταν οι άνδρες, να βρείτε το πλήθος των ανδρών και των γυναικών.

6. Αν αυξήσουμε τις δύο απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου κατά 5 μ. και τις άλλες δύο κατά 3 μ., προκύπτει ορθογώνιο που έχει εμβαδό 168 τ.μ. Να βρεθεί η πλευρά και το εμβαδό του τετραγώνου.
7. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει μέχρι να πεθάνει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλευσε.
8. Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν ίσους όγκους. Αν η βάση του παραλληλεπιπέδου είναι ορθογώνιο με διαστάσεις 4 cm, 9 cm και έχει ύψος ίσο με την ακμή του κύβου, να βρείτε τις διαστάσεις των δύο στερεών.
9. Αν αφαιρέσουμε τον αριθμό που εκφράζει το μήκος της μιας πλευράς ενός τετραγώνου από τον αριθμό που εκφράζει το εμβαδόν του, βρίσκουμε 42. Να βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.
10. Σήμερα ηλικία του Νίκου είναι διπλάσια από την ηλικία του Βασίλη. Πριν από πέντε χρόνια η ηλικία του Νίκου ήταν τα $\frac{10}{4}$ της ηλικίας του Βασίλη. Πόσων χρονών είναι σήμερα και οι δύο:
11. Δύο τετράγωνα με κέντρο Ο βρίσκονται το ένα μέσα στο άλλο. Η διαφορά των περιμέτρων τους είναι ίση με 40 m. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι ίσο με 500 m². Πόσο είναι το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου;
- 
12. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαστάσεις του είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Αν το εμβαδόν του είναι 110cm², να βρείτε τις διαστάσεις του.
13. Ένας έμπορος αγόρασε μπαλάκια του πινακ-πονγκ πληρώνοντας 60 ευρώ. Τα 15 από τα μπαλάκια καταστράφηκαν και τα υπόλοιπα τα πούλησε εισπράτοντας 54 ευρώ. Υπολόγισε ότι έτσι από κάθε μπαλάκι που πούλησε εισέπραξε 0,1 ευρώ περισσότερο από όσο το είχε αγοράσει. Πόσα μπαλάκια αγόρασε;
14. Αγόρασε κάποιος τετράδια και έδωσε 16,8 ευρώ. Αν το κάθε τετράδιο κόστιζε 0,028 ευρώ λιγότερο θα αγόραζε με τα ίδια χρήματα ένα τετράδιο παραπάνω. Πόσα τετράδια αγόρασε;
15. Αγόρασε κάποιος παγωτά και πλήρωσε 16 ευρώ. Αν κάθε παγωτό κόστιζε 0,4 ευρώ λιγότερο με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 παγωτά παραπάνω. Πόσα παγωτά αγόρασε;
16. Αν ένας ποδηλάτης αυξήσει την μέση ταχύτητα του κατά 3 km την ώρα, συντομεύει κατά 0,4 ώρες τον χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει μία απόσταση 108 km. Ποια είναι η μέση ταχύτητα του;

2.4 Κλασματικές εξισώσεις

1. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

- α. Η εξίσωση $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ έχει ρίζα το 1.
- β. Οι εξισώσεις $x^2 - 4 = 0$ και $\frac{4 - x^2}{2 - x}$ είναι ισοδύναμες.
- γ. Η εξίσωση $\frac{3x - 1}{4} - \frac{4x - 3}{2} = \frac{x}{3}$ είναι κλασματική.
- δ. Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{3}{3 + x} + \frac{x}{x} = 2$

2. Να λυθούν οι παρακάτω κλασματικές εξισώσεις.

α. $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{4}{x^2-4}$

β. $\frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-4}$

γ. $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$

δ. $\frac{x+2}{x^2-5x+6} + \frac{2x-1}{2x^2-4x} = \frac{2}{3-x}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $\frac{2x}{x^2-1} = 2 - \frac{x}{1-x}$

β. $\frac{9}{x+4} + 9 = 2x$

γ. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} = 0$

δ. $\frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{4}{2x^2-8} = \frac{2}{x+2}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

α. $\frac{3x^3+5x^2-2x}{x^2+2x} = \frac{1}{3x-1}$

β. $\frac{-3}{x+3} + \frac{-9}{x^2-9} = \frac{-x}{x-3} - \frac{x^2}{9-x^2}$

γ. $\frac{1}{4x-x^2-4} + \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-5x+6}$

δ. $\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x-1}-1} = -\frac{3}{8}$

5. Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 120 ευρώ. Επειδή όμως μεταξύ των ατόμων που πήραν μέρος στο γεύμα ήταν και 3 φιλοξενούμενοι, οι υπόλοιποι αναγκάστηκαν να πληρώσουν 9 ευρώ επιπλέον, ο καθένας. Πόσα άτομα πήραν μέρος στο γεύμα.

6. Ένας εργάτης Α, για να τελειώσει ένα έργο, χρειάζεται 3 μέρες περισσότερο από έναν εργάτη Β. Αν εργαστούν μαζί και οι δύο τελειώνουν το έργο σε δύο ημέρες. Σε πόσες μέρες τελειώνει το έργο ο κάθε εργάτης μόνος του.

7. Σε μία εκδρομή οι γυναίκες ήταν κατά 5 λιγότερες από τους άνδρες. Οι άνδρες πλήρωσαν συνολικά 180 ευρώ, οι δε γυναίκες 80 ευρώ. Να βρείτε πόσοι ήταν οι άνδρες και πόσες οι γυναίκες, αν κάθε άνδρας πλήρωσε 4 ευρώ περισσότερα από κάθε γυναίκα.

8. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\alpha+1}{x^2-x} - \frac{x+2\beta+1}{x^2+x} = \frac{\beta x}{x^2-1}$, όπου α είναι η μικρότερη και β η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2-5x+6 = 0$

9. Να βρείτε τον αριθμό στον οποίο αν προσθέσουμε το πενταπλάσιο του αντιστρόφου του, βρίσκουμε το 4 .

10. Ένα τρένο διανύει 300 Km με σταθερή ταχύτητα. Αν η ταχύτητα του αυξηθεί κατά 5 Km / h, τότε το τρένο θα διανύσει τα 300 Km σε 2 h γρηγορότερα. Ποια είναι η ταχύτητα του τρένου;

2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

1. Αν $-1 < \alpha < 1$ και $2 < \beta < 5$ τότε μεταξύ ποιών τιμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

- $\alpha+\beta$ $\alpha-\beta$ $\alpha\beta$
- $\alpha-2\beta$ $\frac{\alpha}{3}$ $2\alpha+3\beta-1$

2. Αν α, β θετικοί πραγματικοί και $\alpha > \beta$ να γίνει διάταξη στα παρακάτω:

- i. $1, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$
- ii. $\frac{\alpha}{\beta}, 1, \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

3. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν $a > \beta$ τότε $a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
2. Αν $a > -2$ και $x > \psi$ τότε ισχύει $ax > -2\psi$
3. Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $a\beta > \gamma\delta$
4. Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $a - \gamma > \beta - \delta$
5. Η λύση της ανίσωσης $0x > 3$ είναι οι αριθμοί μεγαλύτεροι του 3
6. Αν $a^2 > 0$ τότε $a > 0$
7. Αν $a^3 > 0$ τότε $a > 0$
8. Αν $a < 1$ και $\beta < 1$ τότε $a\beta < 1$
9. Αν $a < \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
10. Αν $\frac{a}{\beta} < 1$, τότε $a < \beta$.
11. Αν $a > \beta$, τότε $a^2 > \beta^2$
12. Αν $a \cdot \beta > 0$, τότε a, β είναι θετικοί.
13. Αν $a > \beta$ και $a > \gamma$, τότε $\beta > \gamma$
14. Αν $a + x > \beta + \psi$, τότε $a > \beta$
15. Αν $a \geq \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $a + \gamma \geq \beta + \delta$
16. Αν ο αριθμός x είναι το πολύ 5, τότε $x < 5$
17. Η ανίσωση $-2x > -5x$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x

4. Να τοποθετήσετε την κατάλληλη διάταξη ($<$, $>$) στα παρακάτω κενά

1. Αν $x < 4$ τότε $-\frac{x}{2} \dots\dots -2$
2. Αν $-x > -6$ τότε $\frac{x-2}{2} \dots\dots 2$
3. Αν $a < -\beta$ τότε $-3 \dots\dots \frac{a+\beta-6}{2}$
4. Αν a, β πραγματικοί αριθμοί όπου $a > 1$ και $\beta > 1$ τότε $a + \beta \dots\dots 1 + a\beta$
5. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $a > \sqrt{2}$ και $\beta > 3\sqrt{2}$ τότε $a\beta \dots\dots 6$

5. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α. $\frac{x-3}{4} - x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}$ και $2-x > 2x-8$

β. $(x+1)^2 > x(x+1)$ και $4x(x-1) \geq (2x-1)^2$

6. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων:

$-2(x-3) \geq 4(x-6)+5$ και $\frac{5(x-2)}{2} + 3 > \frac{3x+1}{2}$

7. Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος x που επαληθεύει την ανίσωση

$$\frac{x-3}{2} - \frac{4x+2}{3} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

8. Να βρείτε τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που το τριπλάσιο του αυξημένο κατά 10 δεν υπερβαίνει το μισό του.

9. Ένας πλασιέ βιβλίων αμείβεται με 20 ευρώ για κάθε εγκυκλοπαίδεια που πουλάει. Τα ημερήσια έξοδα του είναι 35 ευρώ. Να υπολογίσετε πόσες εγκυκλοπαίδειες πρέπει να πουλήσει ώστε να έχει κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ σε 10 ημέρες.

10. Ένας πατέρας ρωτήθηκε πόσα παιδιά έχει και απάντησε: "Έχω 30 ευρώ. Αν δώσω από 8 ευρώ σε κάθε παιδί τότε δεν μου φθάνουν τα χρήματα που έχω. Αν όμως δώσω από 7 ευρώ σε κάθε παιδί, τότε περισσεύουν και χρήματα." Πόσα παιδιά είχε;

11. Τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο από το 17. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.