

Τριγωνομετρία

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

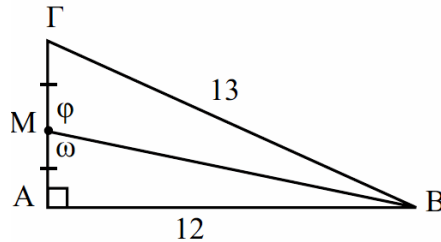
- 1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**
 1. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας είναι καθαροί αριθμοί
 2. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει $\eta\mu\omega = a^2 + 2$, όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός.
 3. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει $\epsilon\phi\omega = 1000$
 4. Ισχύει $\frac{\eta\mu 20^\circ}{\sigma\upsilon\nu 70^\circ} = 1$
 5. Η διαφορά $\sigma\upsilon\nu 85^\circ - \sigma\upsilon\nu 75^\circ$ έχει θετικό πρόσημο.
 6. Η διαφορά $\epsilon\phi 150^\circ - \epsilon\phi 20^\circ$ έχει αρνητικό πρόσημο
 7. Ισχύει $2 \cdot \eta\mu 30^\circ = \eta\mu 60^\circ$
 8. Αν $\omega + \varphi = 90^\circ$ τότε $\eta\mu 2\omega = \sigma\upsilon\nu 2\varphi$
 9. Το γινόμενο $\eta\mu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 152^\circ$ είναι θετικός αριθμός.
- 2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $a = 4\text{cm}$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: 30° , 60° .**
- 3. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση: $2x + 3y = 6$**
 - α) Να κάνετε την γραφική της παράσταση και να βρείτε το σημείο Μ που έχει τεταγμένη 4.
 - β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{xOM}$.
- 4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:**
 $A = \eta\mu 17^\circ + \eta\mu 35^\circ - \sigma\upsilon\nu 73^\circ - \sigma\upsilon\nu 55^\circ$
 $B = \frac{\sigma\upsilon\nu 56^\circ}{\eta\mu 34^\circ} + \frac{\eta\mu 50^\circ}{\sigma\upsilon\nu 40^\circ} - 4$
- 5. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων**
 $A = 3\eta\mu\omega + 5$ και $B = 4 - 2\sigma\upsilon\nu\omega$
- 6. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$), να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:**
 - α) $\eta\mu B + \eta\mu \Gamma = \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma$
 - β) $\eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma = \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$
- 7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$. Αν $AB=12$, $B\Gamma=13$. Να βρείτε**
 - α) $\eta\mu B$, $\sigma\upsilon\nu \Gamma$
 - β) $\eta\mu(90^\circ - \Gamma)$, $\epsilon\phi B$
- 8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{xOM}$, όταν:**
 - α) $M(-6,8)$,
 - β) $M(-4,0)$,
 - γ) $M(0,5)$.
- 9. Να υπολογιστούν οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) όταν :**
 $A\Gamma = 6\text{ cm}$ και $\eta\mu B = \frac{3}{5}$.
- 10. Η παράσταση $\frac{\eta\mu 3^\circ}{\sigma\upsilon\nu 87^\circ} - \frac{\sigma\upsilon\nu 87^\circ}{\eta\mu 3^\circ}$ είναι ίση με:**
 - α. 0,
 - β. 2,
 - γ. 2,
 - δ. δεν προσδιορίζεται.

2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma$
2. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει $\eta\mu(A + B) = 1$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο
3. Αν $\eta\mu 138^\circ = 0,66$, τότε $\eta\mu 42^\circ = 0,66$
4. Αν $\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu 70^\circ$ και $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ τότε $\varphi = 20^\circ$
5. Ο μεγαλύτερος από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu 50^\circ$, $\eta\mu 189^\circ$ είναι το $\eta\mu 189^\circ$
6. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας φ με $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ είναι όλοι θετικοί αριθμοί.

2. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ



3. Να βρεθούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\hat{\omega}$ όταν γνωρίζουμε:

A) $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$, $90^\circ < \omega < 180^\circ$

B) $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$, $0^\circ < \omega < 90^\circ$

Γ) $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{7}{9}$, $90^\circ < \omega < 180^\circ$

Δ) $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $0^\circ < \omega < 90^\circ$

4. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$ να υπολογίσετε:

α) τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της $\hat{\omega}$

β) και την τιμή της παράστασης: $A = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) - \epsilon\varphi(180^\circ - \omega)$.

5. Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 165^\circ + \eta\mu 75^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 0$

β) $\eta\mu 89^\circ + \eta\mu 91^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 1^\circ = 0$

6. Αν $0^\circ < x < 180^\circ$ και $6\eta\mu^2 x = \eta\mu x + 1$ να βρείτε το x .

7. Να εξηγήσετε γιατί είναι $\eta\mu(90^\circ + x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + x) = -\eta\mu x$

8. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2 x - 2\sqrt{2}\eta\mu x + 1 = 0$, αν $0^\circ < x < 180^\circ$

9. Να αποδείξετε ότι:

1) $\eta\mu(90^\circ - \omega) \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \eta\mu(180^\circ - \omega) = 1$

2) $\eta\mu(180^\circ - \omega) \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \eta\mu(90^\circ - \omega) = 1$

10. Αν $90^\circ < x < 180^\circ$ να βρείτε τις τιμές του x :

α) $(\eta\mu x - 2)(2\eta\mu x - 1) = 0$, β) $(\sigma\upsilon\nu x + 2)(\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$.

11. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας \hat{x} όταν $\epsilon\varphi x = -\sqrt{3}$

12. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) - \sigma\upsilon\nu(90^\circ + x) \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu(90^\circ + x) \eta\mu(180^\circ - x)$

2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

- Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει $\eta\mu\omega = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$
- Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$
- Ισχύει $\eta\mu 70^\circ \cdot \epsilon\varphi 20^\circ = \eta\mu 20^\circ$
- Οι αριθμοί $\eta\mu 60^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu 70^\circ$ είναι ίσοι
- Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu 137^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 91^\circ < 0$
- Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu 135^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0$
- Για κάθε γωνία ω ισχύει: $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$
- Η μέγιστη τιμή του $3\sigma\upsilon\nu\omega + 3$ είναι το 3

2. Να δείξετε ότι:

- α) $4\eta\mu^2\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 4$, β) $\sigma\upsilon\nu^2x = 1 - \eta\mu^2x$, γ) $\eta\mu^2x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2x$, δ) $1 + \epsilon\varphi^2x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$,
ε) $\eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu^2x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2x$.

3. Να αποδείξετε ότι:

- α) $(2\eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (3\eta\mu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\omega)^2$
β) $\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$
γ) $\frac{1 + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$

4. Να αποδείξετε ότι

- $\epsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha - \epsilon\varphi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha$
- $\epsilon\varphi\omega + \frac{1}{\epsilon\varphi\omega} = \frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}$
- $\frac{\epsilon\varphi^2x - 1}{\epsilon\varphi^2x + 1} = \eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu^2x$
- $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$
- $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x$

5. Να αποδείξετε ότι

- $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$
- $\frac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{2}{\eta\mu\omega}$
- $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \epsilon\varphi\omega} + \frac{\eta\mu\omega}{1 - \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}} = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\left(\frac{1}{\eta\mu\omega} - \eta\mu\omega\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \sigma\upsilon\nu\omega\right) = \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

6. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ και $90^\circ < x < 180^\circ$, να υπολογίσετε το $\eta\mu x$ και $\epsilon\varphi x$

7. Αν $\epsilon\varphi x = 2$, να υπολογίσετε την παρακάτω παράσταση: $A = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$

2.4 Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων

1. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\eta\mu A = 3\eta\mu B$ τότε $\alpha = 3\beta$
 2. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu B$ τότε $\alpha = 2\beta$
 3. Αν στο τρίγωνο ABΓ ισχύει $A = 60^\circ$ τότε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$
 4. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu \Gamma}$
 5. Υπάρχει τρίγωνο ABΓ με $A = 45^\circ$, $\alpha = 10 \text{ cm}$, $\beta = 20 \text{ cm}$.
 6. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\eta\mu A = \eta\mu B$ τότε $\alpha = \beta$.
 7. Αν σε τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{A} > 90^\circ$ τότε ισχύει: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$
 8. Ο νόμος των ημιτόνων δεν ισχύει σε ορθογώνιο τρίγωνο.
 9. Ο νόμος συνημιτόνων ισχύει σε οποιοδήποτε τρίγωνο.
2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\alpha = \sqrt{48}$, $\beta = 8$, $A = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία του τριγώνου .
3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ να αποδείξετε ότι:
- α) Αν $\hat{A} = 60^\circ$ τότε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$
 - β) Αν $\hat{A} = 120^\circ$ τότε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$
4. Να επιλυθούν τα τρίγωνα με τα εξής στοιχεία:
- 1) $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $\alpha = 30 \text{ m}$
 - 2) $\hat{A} = 30^\circ$, $\alpha = 7 \text{ cm}$, $\beta = 4 \text{ cm}$
5. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν τριγώνου ABΓ στο οποίο είναι $\hat{A} = 40^\circ$, $\alpha = 5 \text{ m}$, και $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 80^\circ$ (Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς από πίνακες)
6. Αν σε ένα τρίγωνο ABΓ ισχύει $\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
7. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ να αποδείξετε ότι:
- α) $\alpha = \beta \sigma\upsilon\nu \Gamma + \gamma \sigma\upsilon\nu B$
 - β) $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$
8. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ABΓ είναι $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Να βρείτε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου .
9. Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι $\alpha + \beta = 12$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $\hat{B} = 45^\circ$. Να υπολογίσετε τις πλευρές του .
10. Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\frac{\alpha}{\eta\mu B} = \frac{\beta}{\eta\mu A}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
11. Να υπολογίσετε τη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου το οποίο έχει $\alpha = 7 \text{ cm}$, $\beta = 11 \text{ cm}$, $\gamma = 10 \text{ cm}$.
12. Οι δείκτες ενός ρολογιού έχουν μήκη 4 cm και 5 cm αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την απόσταση των κορυφών τους στις 4 μ.μ.
13. Σε τρίγωνο ABΓ να αποδείξετε ότι
- 1) Αν $\hat{A} < 90^\circ$, τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$
 - 2) Αν $\hat{A} > 90^\circ$, τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$
14. Σε κύκλο ακτίνας 6 cm θεωρούμε χορδή AB μήκους 9 cm. Να υπολογίσετε τη γωνία που φαίνεται η AB από το κέντρο του κύκλου.