1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς – Δυνάμεις –Ρίζες

Δυνάμεις

1. Πώς ορίζεται η νιοστή δύναμη ενός πραγματικού αριθμού;

Αν α πραγματικός αριθμός και ν θετικός ακέραιος τότε ορίζουμε τη δύναμη α^ν με βάση τον αριθμό α και εκθέτη το ν > 1 ,το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α. Δηλαδή:

$$\alpha^\nu = \alpha\cdot \alpha\cdot \alpha\ldots\alpha \text{ (ν παράγοντες α)}$$

Ακόμα έχουμε ότι:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \quad \text{με } \alpha \neq 0 \text{ και } \nu = 1,2,3,\ldots$$

2. Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες δυνάμεων;

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu} \qquad \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$$

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu} \qquad \left(\alpha^\mu\right)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$$

$$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha\cdot\beta)^\nu \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$$

Ρίζες

1. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α;

Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ονομάζουμε τον μη αρνητικό αριθμό x που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α.

αν $\sqrt{\alpha} = x$ τότε $x^2 = \alpha$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ριζών;

i. $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$ όπου $\alpha \geq 0$

ii. $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$ όπου $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$

Απόδειξη: Αν υψώσουμε στο τετράγωνο κάθε μέλος της ισότητας έχουμε:

Το πρώτο μέλος: $\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha\beta$

Το δεύτερο μέλος: $\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 = \alpha\beta$

Άρα ισχύει

iii. $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ όπου $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$

Απόδειξη:

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο κάθε μέλος της ισότητας έχουμε:

Το πρώτο μέλος: $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Το δεύτερο μέλος: $\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Επομένως ισχύει

1. Τι ονομάζουμε αλγεβρικές παραστάσεις;
Οι εκφράσεις που συνδυάζουν πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών ονομάζονται **αλγεβρικές παραστάσεις.** Ειδικότερα μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί

2. Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης;
Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται, προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής αυτής παράστασης.

3. Τι ονομάζουμε μονώνυμο; Ποιο το κύριο μέρος και ποιοι οι συντελεστές;
Μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού ονομάζεται **μονώνυμο.**

π.χ. $3xy$, $\frac{2}{5}x^2y^3$, $\sqrt{3}xy^5$ **Προσοχή:** Οι εκθέτες πρέπει να είναι πάντα **φυσικοί αριθμοί**

Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.
Π.χ. το $-5x^4ω$ έχει συντελεστή -5 και και κύριο μέρος το $x^4ω$

4. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια και ποια ίσα; Ποια είναι τα ακέραια μονώνυμα;
Όμοια ονομάζονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος και διαφορετικό συντελεστή.

Π.χ. τα μονώνυμα $5x^2y^4$ και $\frac{2}{3}x^2y^4$ είναι όμοια.

Ίσα ονομάζονται τα μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος και ίδιο συντελεστή.
Π.χ. τα μονώνυμα -2χωα και -2ωαχ είναι ίσα.
Ακόμα τα μονώνυμα που έχουν μεταβλητές με εκθέτες ακέραιους αριθμούς ονομάζονται **ακέραια μονώνυμα.**

5. Τι ονομάζεται βαθμός ενός μονωνύμου;
Βαθμός ενός μονωνύμου ονομάζεται ο αριθμός που προκύπτει, αν προσθέσουμε όλους τους εκθέτες των μεταβλητών που περιέχει το μονώνυμο.
Π.χ. Το μονώνυμο: $5x^2v^3z^6$ είναι 2+3+6=11 είναι 11[ου] βαθμού.

1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση Πολυωνύμων

1. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;
Το άθροισμα πολλών μονωνύμων τα οποία δεν είναι όμοια, ονομάζεται πολυώνυμο.
Π.χ. 6χω + 3xz -2ω
Ακόμα τα μονώνυμα από τα οποία αποτελείται ένα πολυώνυμο λέγονται **όροι** του πολυωνύμου. Ένα πολυώνυμο λέγεται **μηδενικό** όταν οι όροι του είναι μονώνυμα με συντελεστές μηδέν.

2. Πώς γίνεται η πρόσθεση μονωνύμων;
Το άθροισμα όμοιων μονωνυμων είναι ένα όμοιο μονωνυμο με αυτά μονωνυμο που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους. π.χ. $2χω^3 +5χω^3-3χω^3=4χω^3$

1.4 Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

1. Πώς γίνεται ο πολλαπλασιασμός μονωνύμων;
Το γινόμενο μονωνυμων είναι ένα μονωνυμο που έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές με εκθέτη σε καθεμία το άθροισμα των εκθετών της. π.χ. $4χω \cdot 3α^2χβ=12α^2χ^2βω$

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

1. Να γράψετε τον ορισμό της ταυτότητας

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα.**

2. Να αποδείξετε όλες τις ταυτότητες που γνωρίζετε

Α. Τετράγωνο Αθροίσματος

$(\alpha + \beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^2=(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)= \alpha^2 +\alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Β. Τετράγωνο Διαφοράς

$(\alpha - \beta)^2 =\alpha^2-2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη:

Για την απόδειξη αυτής της ταυτότητας θέτουμε όπου β το - β.Έτσι ανάγεται στην μορφή της 1ης ταυτότητας: $[\alpha + (-\beta)]^2=(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha(-\beta) + (-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta + \beta^2$

η αλλοιώς $(\alpha - \beta)^2=(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)= \alpha^2 -\alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Γ. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

$(\alpha + \beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

Απόδειξη:

$(\alpha + \beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\alpha\beta + \beta\alpha-\beta = \alpha^2-\beta^2$

Δ. Κύβος Αθροίσματος

$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη:

$(\alpha + \beta)^3=(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2+2\alpha\beta + \beta^2)= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 =$
$=\alpha^3+3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2+\beta^3$

Ε. Κύβος Διαφοράς

$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Απόδειξη:

Όμοια με την απόδειξη της 2ης ταυτότητας, θέτουμε όπου β το - β .Έτσι ανάγεται στην μορφή της 4ης ταυτότητας:

$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 (-\beta) + 3\alpha(-\beta)^2 + (-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

η αλλοιώς $(\alpha - \beta)^3=(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2-2\alpha\beta + \beta^2)= \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 =$
$=\alpha^3-3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2-\beta^3$

ΣΤ. Άθροισμα Κύβων

$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2-\alpha\beta + \beta^2)$

Απόδειξη

Από το 2° μέλος της ταυτότητας έχουμε:

$(\alpha + \beta)(\alpha^2-\alpha\beta + \beta^2) = (\alpha^3-\alpha^2\beta + \alpha\beta^2+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3) = \alpha^3+\beta^3$

Ζ. Διαφορά Κύβων

$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta + \beta^2)$

Απόδειξη

Από το 2° μέλος της ταυτότητας έχουμε:

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta + \beta^2) = (\alpha^3+\alpha^2\beta + \alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3) = \alpha^3-\beta^3$

3. Τι ονομάζουμε ανάπτυγμα, τι τέλεια τετράγωνα και τι συζυγείς παραστάσεις;

Οι παραστάσεις των δεύτερων μελών των ταυτοτήτων (Α) και (Β) λέγονται ανάπτυγμα.
Οι παραστάσεις $(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha - \beta)^2$ λέγονται τέλεια τετράγωνα.
Συζυγείς παραστάσεις είναι οι παραστάσεις της μορφής $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

1 .Τι ονομάζεται παραγοντοποΐηση και ποιες μεθόδους χρησιμοποιούμε;
Παραγοντοποΐηση (ή ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων) λέμε τη διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.
Η παραγοντοποΐηση είναι μια βασική διαδικασία που μας βοηθά στο λύνουμε πολλά προβλήματα πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις είναι: Ο κοινός παράγοντας ,η ομαδοποίηση , η διαφορά τετραγώνων, το ανάπτυγμα τετραγώνου και το τριώνυμο.

2. Τι ονομάζουμε κλασματική αλγεβρική παράσταση;
Κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζονται οι παραστάσεις που έχουν μεταβλητή στον παρονομαστή.

1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

1. Ποια είναι η ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης;
Αν έχουμε δύο πολυώνυμα Δ(x) (διαιρετέος) και δ(x) (διαιρέτης) με $δ(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση Δ(x) : δ(x), τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων π(x) (πηλίκο) και υ(x) (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει: $Δ=δπ+υ$ με $υ<δ$

1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

1. Δώστε τον ορισμό του Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ.
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

1.9 Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Ορισμός Αλγεβρικής παράστασης
Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι της είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς ρητή παράσταση.

2. Μεθοδολογία παραγοντοποίησης ρητών παραστάσεων
Αν σε μια ρητή παράσταση ο αριθμητής ή ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο, τότε για να την απλοποιήσουμε εργαζόμαστε ως εξής:
- Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της και
- διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

1. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών παραστάσεων
* Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες.

$$α \cdot \frac{β}{γ} = \frac{αβ}{γ} \quad \text{και} \quad \frac{α}{β} \cdot \frac{γ}{δ} = \frac{αγ}{βδ}$$

* Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τους παρακάτω κανόνες

$$\frac{α}{β} : \frac{γ}{δ} = \frac{α}{β} \cdot \frac{δ}{γ} = \frac{αδ}{βγ} \qquad \frac{\frac{α}{β}}{\frac{γ}{δ}} = \frac{αδ}{βγ}$$