ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1 Ισότητα τριγώνων

1. Τριγωνική ιδιότητα
Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων.

* Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών είναι 180° δηλαδή $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$ όπου $\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma}$ οι γωνίες του τριγώνου.

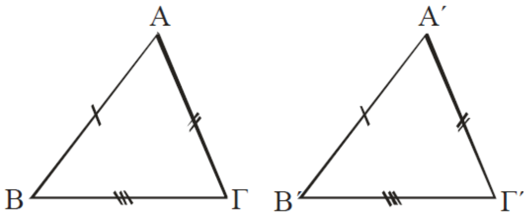
* Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι: οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.

* Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι: οι πλευρές και οι γωνίες του.

2. Να αναφέρεται τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.
Υπάρχουν 3 κριτήρια με τα οποία μπορούμε να δείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα:

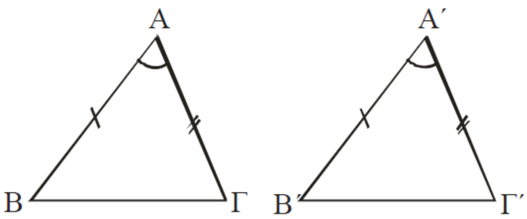
* Όταν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

(Π-Π-Π)



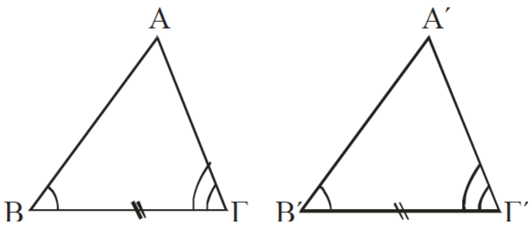
* Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

(Π-Γ-Π)



* Όταν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μια προς μια ίσες, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

(Γ-Π-Γ)



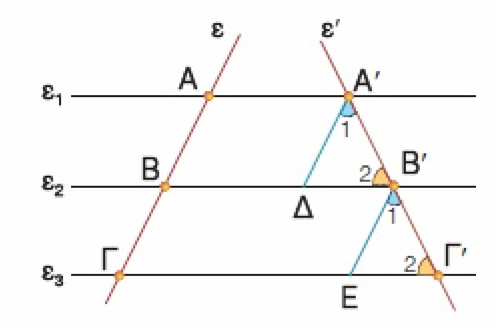
3. Να αναφέρεται τα κριτήρια ισότητας δύο ορθογωνίων τριγώνων.
Τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων προκύπτουν από τα προηγούμενα κριτήρια με τη διαφορά ότι εδώ ξέρουμε δύο γωνίες ότι είναι ίσες (οι ορθές). Άρα με δεδομένη τη μία γωνία, αναγόμαστε στα κριτήρια (Π-Γ-Π) και (Γ-Π-Γ):

* Όταν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με μια αντίστοιχη πλευρά και οξεία γωνία ενός άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

* Όταν δύο πλευρές του ενός είναι ίσες με δύο αντίστοιχες πλευρές του άλλου, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.

4. Προσοχή
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.
Όταν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε και τα υπόλοιπα στοιχεία τους θα είναι ίσα.
Για να είναι ίσα δύο τρίγωνα πρέπει από τα 3 στοιχεία τους ένα τουλάχιστον να είναι πλευρά.
Με 3 γωνίες ίσες τα τρίγωνα δεν είναι ίσα!!!
Σε ισόπλευρο ή ισοσκελές τρίγωνο το ύψος είναι διχοτόμος και διάμεσος.

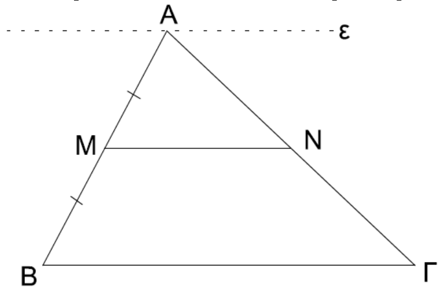
1. Θεώρημα 1:
Όταν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει



Απόδειξη
Πράγματι, αν φέρουμε Α΄Δ // ε, Β΄Ε // ε και συγκρίνουμε τα τρίγωνα Α΄Β΄Δ και Β΄Γ΄Ε παρατηρούμε ότι έχουν:
 * Α΄Δ = Β΄Ε γιατί Α΄Δ = ΑΒ, Β΄Ε = ΒΓ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΑ΄ΔΒ, ΒΒ΄ΕΓ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε ΑΒ = ΒΓ.
 * Β2΄ = Γ2΄ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε2, ε3 που τέμνονται από την ε΄.
 * Α1΄ = Β1΄ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Α΄Δ, Β΄Ε που τέμνονται από την ε΄.

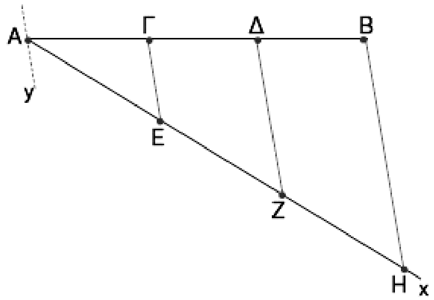
Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε Α΄Β΄ = Β΄Γ΄.

2. ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Αν από το μέσο πλευράς τριγώνου φέρουμε την παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



Απόδειξη:
Από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΜΝ // ΒΓ. Αν φανταστούμε από το Α την ε // ΒΓ τότε από θεώρημα 1 οι παράλληλες ε, ΜΝ , ΒΓ θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Δηλαδή το Ν θα είναι μέσο της ΑΓ.

3 . Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα



Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx και πάνω σ΄ αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ. Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε ΖΔ, ΕΓ, Αy παράλληλες προς τη ΒΗ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα έχουμε ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο ΑΒ σε 4, 5, 6, ..., ν ίσα τμήματα.

4. Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων – Ιδιότητες αναλογιών

* Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ·ΑΒ.
* Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.
* Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$
* Η ισότητα $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ ονομάζεται αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα α, δ ονομάζονται άκροι όροι, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα β, γ ονομάζονται μέσοι όροι της αναλογίας.

*** Οι ιδιότητες των αναλογιών είναι**

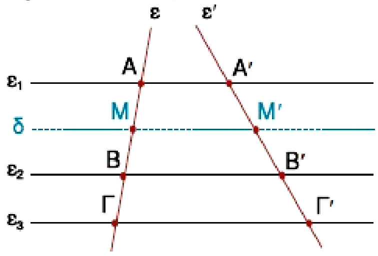
Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

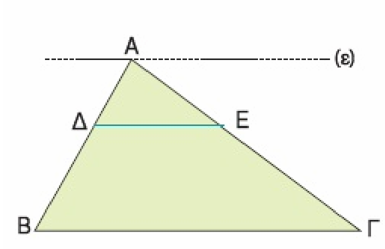
1.3 Θεώρημα του Θαλή

1. Θεώρημα Θαλή
Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:



αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ τότε $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

2. Συνέπειες Θεωρήματος Θαλή
Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

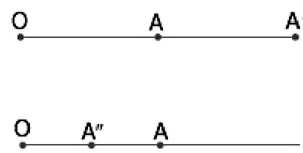


α. Αν ΔΕ//ΒΓ τότε $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$

β. Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ τότε ΔΕ//ΒΓ

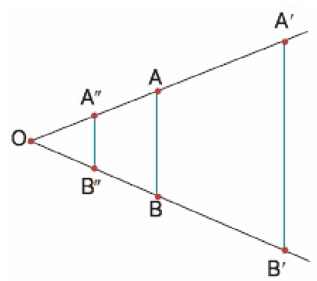
1.4 Ομοιοθεσία

1. Το ομοιόθετο σημείου
Αν πάρουμε δύο σημεία Ο, Α και στην ημιευθεία ΟΑ πάρουμε ένα σημείο Α', τέτοιο ώστε ΟΑ' = 2·ΟΑ, τότε λέμε ότι το σημείο Α' είναι **ομοιόθετο** του Α με κέντρο Ο και λόγο λ = 2.
Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο Ο και λόγο λ ονομάζεται **ομοιοθεσία**. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο ομοιοθεσίας**, ενώ ο αριθμός λ ονομάζεται **λόγος ομοιοθεσίας**. Είναι φανερό ότι το κέντρο Ο έχει ομοιόθετο τον εαυτό του.

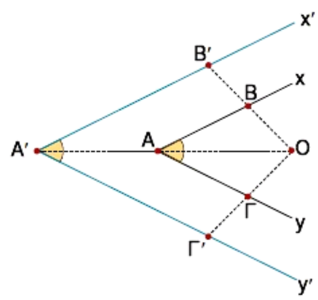


2. Το ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος
Στην ομοιοθεσία με κέντρο Ο και λόγο λ = 2 το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι το ευθύγραμμο τμήμα Α'Β', όπου Α', Β' τα ομοιόθετα των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Επειδή ΟΑ' = 2·ΟΑ και ΟΒ' = 2·ΟΒ, θα έχουμε

$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'} = 2$ οπότε AB//A'B'

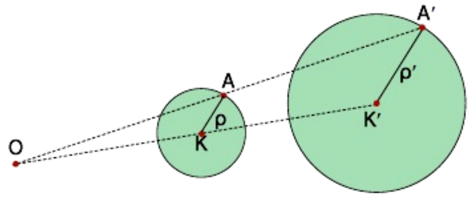


3. Το ομοιόθετο γωνίας
Για να βρούμε το ομοιόθετο μιας γωνίας xÂy με κέντρο Ο και λόγο ένα θετικό αριθμό λ (π.χ. λ = 2), παίρνουμε ένα σημείο Β στην πλευρά Ax, ένα σημείο Γ στην πλευρά Ay και βρίσκουμε τα σημεία Β', Α', Γ' που είναι αντίστοιχως τα ομοιόθετα των Β, Α, Γ. Ορίζεται έτσι η γωνία x'Â'y', που είναι ομοιόθετη της γωνίας xÂy. Αν συγκρίνουμε τις δύο γωνίες διαπιστώνουμε ότι είναι ίσες, δηλαδή xÂy = x'Â'y'. Επομένως Οι **ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες**



4. Ομοιόθετο πολυγώνου
* Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
* Οι αντίστοιχες πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
* Αν το πολύγωνο Π΄ είναι ομοιόθετο του Π με λόγο λ, τότε το Π΄ είναι - μεγέθυνση του Π, όταν λ > 1 - σμίκρυνση του Π, όταν 0 < λ < 1 και - ίσο με το Π, όταν λ = 1.

5. Το ομοιόθετο κύκλου
Όμοια με λόγο λ=2 παίρνουμε το ομοιόθετο του κύκλου στο διπλανό σχήμα.



1.5 Ομοιότητα

1. Όμοια πολύγωνα
Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.
Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

2. Λόγος ομοιότητας – Κλίμακα
Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στο χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων.

3. Όμοια Τρίγωνα – Κριτήρια Ομοιότητας τριγώνων
Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.
Τα **κριτήρια ομοιότητας τριγώνων** είναι:
Όταν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή είναι όμοια.
Το **αντίστροφο** είναι:
Όταν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, δηλαδή είναι όμοια.

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

1. Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων - Τύπος
Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Δηλαδή $\frac{E}{E'} = \lambda^2$ όπου λ ο λόγος ομοιότητας τους.