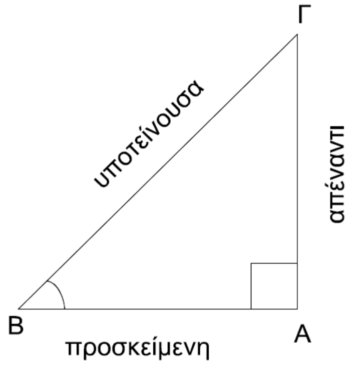
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0° < ω < 180°$

1. Να δώσετε τον ορισμό του ημίτονου, του συνημίτονου και της εφαπτομένης.

■ **Ημίτονο** οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζουμε τον λόγο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα του τριγώνου. $ημ\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$, $ημ\hat{Γ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$



■ **Συνημίτονο** οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζουμε τον λόγο της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα του τριγώνου. $συν\hat{B} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$, $συν\hat{Γ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$

■ **Εφαπτομένη** οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζουμε τον λόγο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά. $εφ\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$, $εφ\hat{Γ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί των συμπληρωματικών γωνιών

Με βάση τα παραπάνω ισχύουν ημΒ=συνΓ και ημΓ=συνΒ και επειδή οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ είναι συμπληρωματικές δηλαδή $\hat{B}+\hat{Γ}=90°$ έχουμε $\hat{B}=90° - \hat{Γ}$ έχουμε

ημ(90-Γ)=συνΓ , συν(90-Γ)=ημΓ

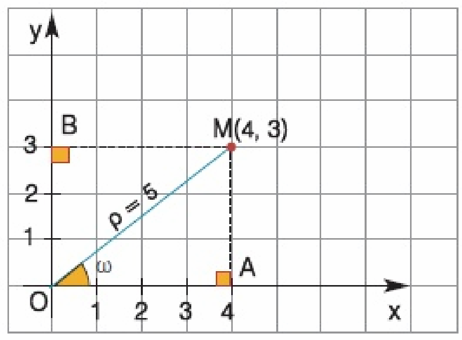
Επομένως αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μίας από τις δύο οξείς γωνίες, μπορούμε να υπολογίσουμε και για την άλλη οξεία γωνία με τους ακόλουθους τύπους:

$ημ(90° — ω) = συνω$ και $συν (90° — ω) = ημω$

3. Για οποιαδήποτε γωνία ω ποιες τιμές παίρνει το ημω και το συνω;

Για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ(x,y) στο επίπεδο είναι

$|x| < ρ$ και $|y| < ρ$, με $ρ= \sqrt{x^2 + y^2}$ επειδή οι κάθετες πλευρές κάθε ορθογωνίου τριγώνου είναι μικρότερες της υποτείνουσας. Από την ιδιότητα των απολύτων τιμών προκύπτει:



$—ρ < x < ρ$ και $— ρ < y < ρ$ ή διαιρώντας με το ρ όλους τους όρους έχουμε

$-1 < \frac{x}{ρ} < 1$ και $-1 < \frac{y}{ρ} < 1$

Επομένως: $-1<συνω<1$ και $-1<ημω<1$

Επομένως το ημίτονο και το συνημίτονο μπορούν να πάρουν τις τιμές μεταξύ -1 και 1, δηλαδή έχουν μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστο το -1. Προσοχή: το ημίτονο και το συνημίτονο δεν λαμβάνουν την τιμή -1 ή 1 για την ίδια γωνία.

4. Ποιο είναι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών σε κάθε τεταρτημόριο;

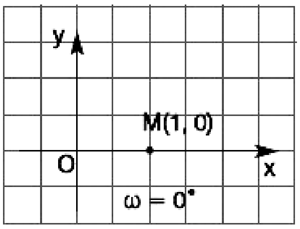
■ Στο 1° τεταρτημόριο όλα είναι θετικά (ημω, συνω, εφω).

■ Στο 2° τεταρτημόριο το ημίτονο είναι θετικό, ενώ τα συνημίτονα και οι εφαπτόμενες είναι αρνητικά.

■ Στο 3° τεταρτημόριο η εφαπτομένη είναι θετική, ενώ τα ημίτονα και τα συνημίτονα είναι αρνητικά.

■ Στο 4° τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι θετικό, ενώ τα συνημίτονα και οι εφαπτόμενες είναι αρνητικά.

5. Υπολογισμός γωνιών 0°, 90°, 180°

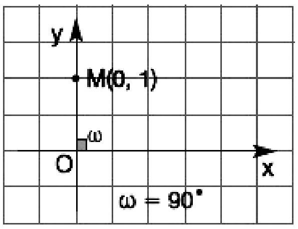


Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οx
π.χ. το M(1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 0°$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 0° = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0° = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varepsilon\varphi 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

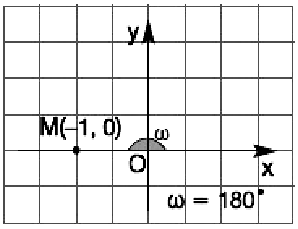


Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οy
π.χ. το M(0,1), τότε $\omega = x\hat{O}M = 90°$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 90° = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90° = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

εφ90° δεν ορίζεται
(γιατί $x = 0$)



Αν Μ σημείο του ημιάξονα Οx′
π.χ. το M(–1,0), τότε $\omega = x\hat{O}M = 180°$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 180° = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 180° = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\varepsilon\varphi 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

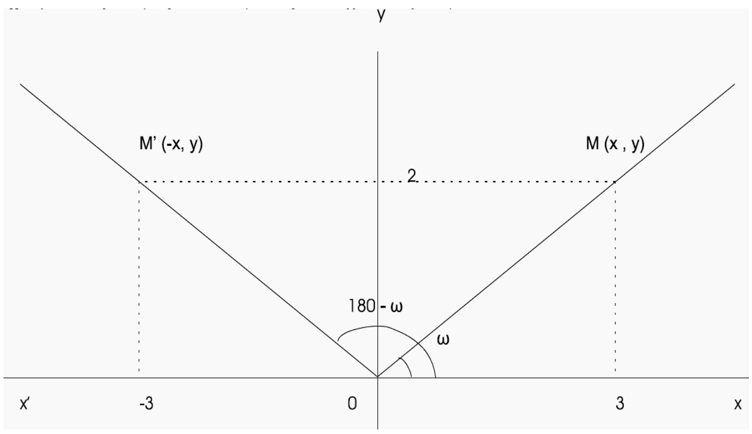
Γενικότερα έχουμε τον πίνακα

Γωνία ω σε μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°
Γωνία ω σε rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται

2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

1. Με τι ισούται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των παραπληρωματικών γωνιών.
Παραπληρωματικές ονομάζονται οι γωνίες που έχουν άθροισμα 180°.

Έστω το σημείο M(3,2) και η γωνία xOM = ω. Αν M' είναι το συμμετρικό του M ως π
τότε οι συντεταγμένες του M' θα είναι x = -3, y = 2. Ακόμα x΄OM'= ω, οπότε x O M' = 180-ω.Σύμφωνα με τα παραπάνω υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:



$\eta\mu\omega = \dfrac{y}{\rho}$

και $\eta\mu(180° - \omega) = \dfrac{y}{\rho} = \eta\mu\omega$ και

$\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x}{\rho}$ και

$\sigma\upsilon\nu(180° - \omega) = -\dfrac{x}{\rho} = -\sigma\upsilon\nu\omega$ όμοια $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{y}{x}$ και $\varepsilon\varphi(180° - \omega) = -\dfrac{y}{x} = -\varepsilon\varphi\omega$

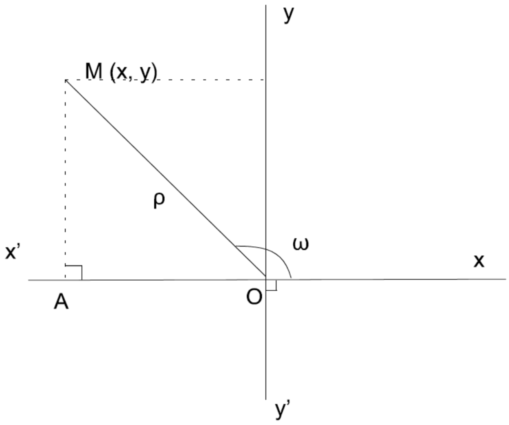
Αν συνοψίσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε τον παρακάτω πίνακα για παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° - ω:

ημ(180°-ω) = ημω , συν (180° — ω) = —συνω , εφ(180° — ω) = — εφω

2.3 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

1. Να αποδείξετε τον τύπο:

$$\text{εφω} = \frac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$$



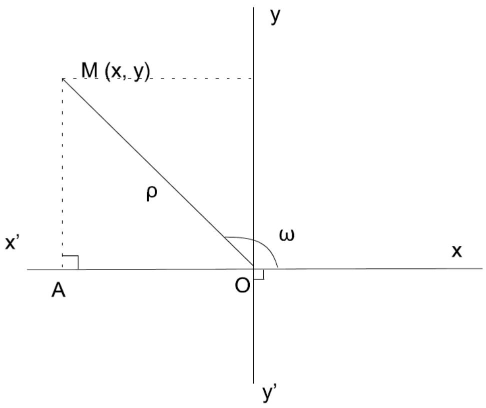
Για τη γωνία $x\hat{O}M$ = ω οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι:

$\text{ημω} = \frac{y}{\rho}$ και $\text{συνω} = \frac{x}{\rho}$ Αν τώρα πάρουμε το λόγο του ημίτονου προς του συνημίτονου θα έχουμε:

$$\frac{\text{ημω}}{\text{συνω}} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y\rho}{x\rho} = \frac{y}{x} = \text{εφω}$$

2. Να αποδείξετε τον τύπο:

ημ²ω + συν²ω = 1



Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΜ και έχουμε:

$OA^2+AM^2=OM^2$

$x^2+y^2=\rho^2$ (διαιρούμε με ρ^2)

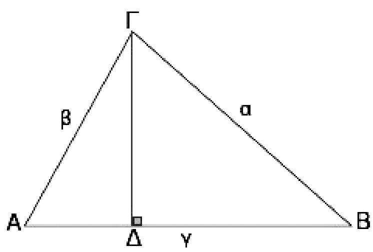
$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} \Rightarrow \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} = 1$$

οπότε $(\text{συνω})^2 + (\text{ημω})^2 = 1$ η $\text{ημ}^2\text{ω}+\text{συν}^2\text{ω}=1$

2.4 Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων

1. Νόμος των ημιτόνων

Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΓΔ. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:



$\text{ημ}A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \Rightarrow \Gamma\Delta = \beta \cdot \text{ημ}A$ (1) και $\text{ημ}B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \Rightarrow \Gamma\Delta = \alpha \cdot \text{ημ}B$ (2)

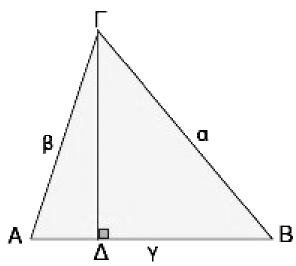
από (1) ^ (2) έχουμε

β·ημΑ=α·ημΒ άρα $\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B}$ όμοια $\frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}$ και τελικά

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}$$ (νόμος των ημιτόνων)

2. Νόμος συνημιτόνων

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε:



$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$ (1).

Επειδή ΔΒ = γ - ΑΔ, η ισότητα (1) γράφεται: $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta)^2$ ή $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + A\Delta^2 - 2\gamma \cdot A\Delta$ (2). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2$ και $\text{συν}A = \frac{A\Delta}{\beta}$ και ΑΔ = βσυνΑ.

Άρα η ισότητα (2) γράφεται: **α² = β² + γ² - 2βγσυνΑ**

Όμοια : **β² = α² + γ² – 2αγσυνΒ** και **γ² = α² + β² – 2αβσυνΑ** (νόμος των συνημιτόνων)