

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΥΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \ln x$, $x > 0$.

A) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f \circ h = f$, όπου $h(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

B1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B2) Να βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο η εξίσωση $f(x) = n$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(n-1, n)$.

Γ1) Να αποδείξετε ότι η μοναδική ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = 0$.

Γ2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(\frac{e^{2021x} + e^{2020x}}{2}\right) = f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Ε) Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο g' για τις οποίες ισχύουν:

- $g(0) = g'(0) = 1$
- $g(x)g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επιμέλεια: Λευτέρης Παπανικολάου, Μαθηματικός

Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(g(\eta\mu(x^2 + 1))) < f'(g(x^2 + 1))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x < 0 \\ 2\sqrt{x} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Θεωρούμε

επίσης την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} - e^x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

A2) Να βρείτε κατάλληλους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ έτσι ώστε για τη συνάρτηση g να εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο $[\alpha, \beta]$.

B1) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B3) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε όλο το \mathbb{R} .

Επιμέλεια: Λευτέρης Παπανικολάου, Μαθηματικός

B4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

B5) Να αποδείξετε ότι: $e^e + e > 2e^{\sqrt{e}}$.

Επιμέλεια: Λευτέρης Παπανικολάου, Μαθηματικός