

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

2ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

A) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in [0, +\infty)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

B) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(36, 6)$.

Γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\sqrt{f(x^{2020})} < \frac{\sqrt{3}}{6}x^{1010} + \sqrt{3}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = e^x + \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να ορίσετε τη σύνθεση $\varphi = g \circ f$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $\varphi(x) = 2e^{\sqrt{x}} - 1$.

ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\varphi(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου α .

Επιμέλεια: Λευτέρης Παπανικολάου, Μαθηματικός